با ایران توشه
یک قدم جلوتر
باش!

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



ایران توشه، مرجع دانلود فایل های کمک آموزشی دانش آموزان و کنکوری ها

همه چیز
برای موفقیت
تو!

- دانلود رایگان آزمون های آزمایشی قلمچی، خیلی سبز، گاج و ...
- دانلود رایگان گام به گام تمامی دروس
- دانلود رایگان نمونه سوالات امتحانی (نوبت اول و دوم) و امتحانات نهایی
- دانلود رایگان جزوه های کمک آموزشی و شب امتحانی

کافیست هر فایلی که نیاز دارید را در گوگل به این صورت جستجو کنید:

فایل مورد نیاز + ایران توشه

مثال:

دانلود گام به گام دوازدهم تجربی ایران توشه



irantooshe.ir

t.me/irantooshe

گام به گام ریاضی هشتم

پاسخ فعالیت‌ها، کارهای در کلاس و تمرین‌های کتاب

پایه‌ی هشتم · دوره‌ی اول متوسطه

شامل پاسخ فعالیت‌ها، کارهای در کلاس، تمرین‌ها و تمرین‌های ترکیبی کتاب

تهیه‌شده در ایران‌توشه، توشه‌ای برای موفقیت

irantooshe.ir

فهرست فصل‌ها

۱ فصل اول — عددهای صحیح و گویا ۴

۲ فصل دوم — عددهای اول ۲۹

۳ فصل سوم — چندضلعی‌ها ۴۶

۴ فصل چهارم — جبر و معادله ۶۸

۵ فصل پنجم — بردار و مختصات ۸۷

۶ فصل ششم — مثلث ۱۰۰

۷ فصل هفتم — توان و جذر ۱۱۹

۸ فصل هشتم — آمار و احتمال ۱۳۵

۹ فصل نهم — دایره ۱۴۸

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی هشتم - فصل اول

عددهای صحیح و گویا

فهرست

۱ صفحه ۲ · فعالیت — مرور عددهای صحیح: حرکت روی محور ۶
۲ صفحه ۲ · فعالیت — مرور: قرینه‌ی عددهای صحیح ۶
۳ صفحه ۲ · فعالیت — مرور: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم ۷
۴ صفحه ۲ · فعالیت — مرور: ترتیب انجام عملیات ۷
۵ صفحه ۳ · فعالیت — چهار راه‌حل برای 29−37+43− ۸
۶ صفحه ۳ · کار در کلاس — محاسبه با روش دلخواه ۸
۷ صفحه ۳ · کار در کلاس — کدام محاسبه نادرست است؟ ۹
۸ صفحه ۳ · کار در کلاس — دسته‌بندی مناسب ۹
۹ صفحه ۴ · کار در کلاس — جمع عددهای ۱ تا ۱۰۰ ۹
۱۰ صفحه ۴ · کار در کلاس — جمع‌های الگودار ۱۰
۱۱ صفحه ۴ · کار در کلاس — گذاشتن علامت در مربع‌ها ۱۰
۱۲ صفحه ۴ · فعالیت — بزرگ‌ترین مقدار ممکن ۱۱
۱۳ صفحه ۵ · تمرین — عددهای صحیح از روی شرط ۱۱
۱۴ صفحه ۵ · تمرین — دسته‌بندی عددها ۱۲
۱۵ صفحه ۵ · تمرین — محاسبه‌ی عبارت‌های عددی ۱۲
۱۶ صفحه ۵ · تمرین — عددهای خاص ۱۳
۱۷ صفحه ۵ · تمرین — جدول جادویی ۱۳
۱۸ صفحه ۶ · فعالیت — نمایش کسرها روی محور ۱۴
۱۹ صفحه ۶ · فعالیت — عدد مخلوط و کسر ۱۴
۲۰ صفحه ۶ · فعالیت — عددهای صحیح و غیرصحیح روی محور ۱۴
۲۱ صفحه ۷ · فعالیت — کسرهای مساوی روی محور ۱۵
۲۲ صفحه ۷ · فعالیت — پیدا کردن مقدار x ۱۵
۲۳ صفحه ۷ · کار در کلاس — ساده کردن کسرها ۱۵
۲۴ صفحه ۷ · کار در کلاس — خواندن عدد از روی عقربه ۱۶
۲۵ صفحه ۷ · کار در کلاس — مرتب کردن عددهای گویا ۱۶
۲۶ صفحه ۷ · کار در کلاس — مقایسه با >، < یا = ۱۶
۲۷ صفحه ۷ · کار در کلاس — جای عددها در جدول ۱۶
۲۸ صفحه ۸ · فعالیت — کسرهای بین ۱ و ۲ ۱۷
۲۹ صفحه ۸ · کار در کلاس — کسرهای بین ۰ و ۱- ۱۸
۳۰ صفحه ۹ · فعالیت — نتیجه‌گیری با بردارها ۱۸
۳۱ صفحه ۹ · تمرین — عددهای صحیح و طبیعی گویا هستند؟ ۱۸
۳۲ صفحه ۹ · تمرین — وصل کردن کسرهای مساوی ۱۹
۳۳ صفحه ۹ · تمرین — نوع عددها: طبیعی، صحیح، گویا ۱۹
۳۴ صفحه ۹ · تمرین — تعیین علامت و ساده کردن ۱۹
۳۵ صفحه ۱۰ · فعالیت — نوشتن جمع از روی محور ۲۰
۳۶ صفحه ۱۰ · فعالیت — نوشتن به صورت جمع دو عدد گویا ۲۰

۳۷ صفحه ۱۱ · فعالیت — گرد کردن و محاسبه‌ی تقریبی ۲۱

۳۸ صفحه ۱۱ · کار در کلاس — جمع و تفریق به کمک محور ۲۱

۳۹ صفحه ۱۲ · فعالیت — جمع و تفریق با مخرج مشترک ۲۱

۴۰ صفحه ۱۲ · کار در کلاس — جمع و تفریق کسرهای هم‌مخرج و غیرهم‌مخرج ۲۲

۴۱ صفحه ۱۳ · کار در کلاس — جمع عدد مخلوط ۲۲

۴۲ صفحه ۱۳ · تمرین — جمع و تفریق عددهای گویا ۲۳

۴۳ صفحه ۱۳ · تمرین — الگو یابی در جمع و تفریق ۲۳

۴۴ صفحه ۱۴ · فعالیت — ضرب عددهای گویا ۲۳

۴۵ صفحه ۱۴ · کار در کلاس — محاسبه‌ی ضرب عددهای گویا ۲۴

۴۶ صفحه ۱۵ · فعالیت — معکوس عدد گویا ۲۵

۴۷ صفحه ۱۵ · فعالیت — تبدیل تقسیم به ضرب ۲۵

۴۸ صفحه ۱۵ · فعالیت — جاهای خالی با کسر مناسب ۲۶

۴۹ صفحه ۱۶ · کار در کلاس — تقسیم عددهای گویا ۲۶

۵۰ صفحه ۱۶ · فعالیت — تبدیل کسر به عدد اعشاری ۲۷

۵۱ صفحه ۱۷ · تمرین — محاسبه‌های گویا (۱) ۲۷

۵۲ صفحه ۱۷ · تمرین — ساده‌ترین صورت ۲۸

۵۳ صفحه ۱۷ · تمرین — محاسبه‌های گویا (۲) ۲۸

۵۴ صفحه ۱۸ · تمرین ترکیبی — نمایش عددهای گویا روی محور ۲۸

۵۵ صفحه ۱۸ · تمرین ترکیبی — محاسبه‌ی عبارت‌های گویای ترکیبی ۲۸

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir

۱ صفحه ۲ فعالیت

۱ــ برای هر حرکت روی محور، یک عدد بنویسید.

حرکت به سمت راست را با عدد مثبت و حرکت به سمت چپ را با عدد منفی نشان می‌دهیم و اندازه‌ی عدد برابر تعداد واحدهای جابه‌جایی است؛ مثلاً حرکت ۳ واحد به راست 3+ و حرکت ۵ واحد به چپ 5- است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲ صفحه ۲ فعالیت

۲ــ جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید (قرینه‌ی هر عدد صحیح را بنویسید).

قرینه‌ی هر عدد، عددی است که فاصله‌اش از صفر با آن عدد برابر ولی در طرف دیگر صفر قرار دارد؛ یعنی علامت عدد عوض می‌شود. مثلاً قرینه‌ی 3 برابر 3-، قرینه‌ی 5- برابر 5، قرینه‌ی 8 برابر 8- و قرینه‌ی 0 برابر 0 است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳ صفحه ۲ فعالیت

۳ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$-4-8 = -3+9 = 8-12 = -16+12 =$

$-4\times(-3) = -12\div 2 = -8\div(-4) = -3\times 7 =$

عبارت	حاصل
$16+12-$	4-
$8-12$	4-
$3+9-$	6
$4-8-$	12-
$7\times 3-$	21-
$(4-)\div 8-$	2
$2\div 12-$	6-
$(3-)\times 4-$	12

۴ صفحه ۲ فعالیت

۴ــ حاصل عبارت‌ها را با توجه به ترتیب عملیات به دست آورید.

$-16\div 2\times 3-4 = -8-3\times 5 = -8-15 =$

$-4\div 4-4\times 3 = 1-2\times(1-(8-9)) =$

ترتیب: ابتدا پرانتز، سپس ضرب و تقسیم (از چپ به راست) و در پایان جمع و تفریق.

- $-8-3\times 5 = -8-15 = -23$
- $-16\div 2\times 3-4 = -8\times 3-4 = -24-4 = -28$
- $1-2\times(1-(8-9)) = 1-2\times(1-(-1)) = 1-2\times 2 = 1-4 = -3$
- $-4\div 4-4\times 3 = -1-12 = -13$

ایران توشه
توشه راه موفقیت

۵ صفحه ۳ فعالیت

۵ــ عبارت 43+37−29− را چهار دانش‌آموز محاسبه کرده‌اند. راه‌حل هریک را توضیح دهید. شما کدام راه‌حل را می‌پسندید؟ چرا؟ آیا راه‌حل دیگری برای پیدا کردن حاصل این عبارت سراغ دارید؟

راه‌حل علی: 43+37−29− = 29−6− = 35−

راه‌حل مجتبی: 43+37−29− = 43+8− = 35−

راه‌حل مرتضی: 43+37−29− = 72+37− = 35−

راه‌حل مصطفی: 40−3 / 30+7 / 20−9 ⟸ 30−5− = 35−

- **علی:** عمل‌ها را به ترتیب از چپ به راست انجام داده است؛ ابتدا 43+37− = 6− و سپس 29−6− = 35−.
- **مجتبی:** ابتدا 37−29 = 8 را حساب کرده (جمع جبری دو عدد آخر) و سپس 43+8− = 35− به دست آورده است.
- **مرتضی:** ابتدا عددهای منفی را با هم جمع کرده (43−29− = 72−) و سپس عدد مثبت را به آن افزوده است (72+37− = 35−).
- **مصطفی:** هر عدد را به دهگان و یکان شکسته است: 40−3− = 43−، 30+7 = 37، 20−9− = 29−.

دهگان‌ها: 40+30−20− = 30− و یکان‌ها: 3+7−9 = 5−؛ پس حاصل 30−5− = 35− می‌شود.

هر چهار راه‌حل درست‌اند و حاصل 35− است. راه‌حل مجتبی یا مصطفی برای محاسبه‌ی ذهنی ساده‌تر است، چون عددهای کوچک‌تری پیش می‌آید. راه دیگر: عددهای هم‌علامت را با هم جمع کنیم و سپس نتیجه را با عدد دیگر جمع کنیم، یا از ماشین‌حساب برای وارسی کمک بگیریم.

۶ صفحه ۳ کار در کلاس

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را با روش مورد نظر خود به دست آورید.

= 19−13−14+(17−)− = (9−)+2−(7−)− = (19−)−(4−)−18− = 23−100+97−24−

- 1− = 31−32 = 17+14−13−19 = (17−)+14−13−19−
- 4− = 7−11 = 7−2−9 = (9−)+2−(7−)−
- 5 = 18−23 = 18−+4+19 = (19−)−(4−)−18−
- 44− = 47−+3 = (97−+100)+(24−23−) = 24−97+100−23

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۷ صفحه ۳ کار در کلاس

۲ــ حاصل عبارت 10+3−7−2 را به دو روش حساب کرده‌ایم. کدام درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید.

10+3−7−2 = 13−5 = 8 و 10+3−7−2 = 13−9 = 4

روش دوم درست است. در عبارت 10+3−7−2 هم ۷ و هم ۲ کم می‌شوند، پس از ۱۳ باید مجموع آنها، یعنی 7+2 = 9، کم شود: 13−9 = 4. در روش اول به اشتباه 7− را به صورت 5− = (7−2)− حساب کرده‌اند، در حالی که پرانتز در عبارت وجود ندارد.

۸ صفحه ۳ کار در کلاس

۳ــ قبل از انجام‌دادن محاسبات در عبارت‌های داده شده خوب دقت، و با دسته‌بندی مناسب، راه ساده‌ای پیدا کنید. راه‌حل خود را با راه‌حل‌های دوستانتان مقایسه کنید و آنگاه با ماشین‌حساب، درستی پاسخ‌های خود را بررسی کنید.

−32−21+12+3×7 = −40+35+80−17−40 =

- −40−17+80−40+35−40: (−40−40+80)+(35−17) = 0+18 = 18
- −32−21+12+3×7 = −32−21+12+21: (−32+12)+(−21+21) = 0−20 = −20

۹ صفحه ۴ کار در کلاس

۴ــ یکی از ریاضی‌دانان بزرگ در کودکی جمع عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را با روشی ابتکاری محاسبه کرد:

1+2+3+...+98+99+100 = ؟ چند جفت عدد با هم جمع شده‌اند؟ حاصل جمع هر جفت عدد چند است؟ حاصل عبارت چند می‌شود؟

عددها را دوبه‌دو از دو طرف جفت می‌کنیم: 1+100، 2+99، 3+98، ...، 50+51. هر جفت 101 می‌شود.

- تعداد جفت‌ها: 50
- حاصل جمع هر جفت: 101
- حاصل عبارت: 50×101 = 5050

توشه ای برای موفقیت

۱۰ صفحه ۴ کار در کلاس

۵ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. روش کار را توضیح دهید.

= 12+10−8+6−4+2−

= (1−10−)(1−9−)...(1−8)(1−9)(1−10)

عبارت اول: عددها را دوبه‌دو جفت می‌کنیم: 6 = 2+2+2 = (12+10−)+(8+6−)+(4+2−).

عبارت دوم: در این حاصل‌ضرب، وقتی عامل (1−1) می‌رسد برابر صفر است (عامل‌ها از 1−10 تا 1−10− پشت‌سرهم‌اند و 0 = 1−1 در میان آنها هست). حاصل‌ضرب هر عددی در صفر، صفر است؛ پس حاصل 0 می‌شود.

۱۱ صفحه ۴ کار در کلاس

۶ــ ابتدا در مربع‌های خالی علامت «+» یا «−» بگذارید؛ سپس عبارت داده شده را محاسبه کنید و همه‌ی عددهای صحیح ممکن را که به دست می‌آیند از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

2 □ (7+) □ 3−

علامت‌ها	محاسبه	حاصل
+ و +	3+7+2−	6
+ و −	3+7−2−	2
− و +	3−7+2−	8−
− و −	3−7−2−	12−

مرتب‌شده از کوچک به بزرگ: 12−, 8−, 2, 6.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲ صفحه ۴ فعالیت

در جاهای خالی علامت «+» یا «−» را طوری قرار دهید که حاصل عبارت زیر، بزرگ‌ترین مقدار ممکن شود:

(−9) □ (+3) □ (−6) □ 5−. در زیر، چهار پاسخ به این مسئله داده شده که فقط یکی از آنها درست است. آن را مشخص کنید و دلیل نادرست‌بودن پاسخ‌های دیگر را هم توضیح دهید.

پاسخ اول: 17− = 6−11− = 9−3+6−5− = (−9)+(+3)+(−6)+5−

پاسخ دوم: (−9)−(+3)−(−6)−5− که به صورت 23− = 9−3−6−5− نوشته شده است.

پاسخ سوم: 13 = 1+12 = 9+3+6+5− = (−9)−(+3)+(−6)−5−

پاسخ چهارم: 1 = 11+12− = 9+3+6−5− = (−9)−(+3)+(−6)+5−

پاسخ سوم درست است و بزرگ‌ترین مقدار ممکن 13 است. برای بزرگ‌ترین حاصل باید عددهای منفی را کم کنیم (تفریق عدد منفی یعنی جمع با قرینه‌ی آن) و عدد مثبت را جمع کنیم: = (−9)−(+3)+(−6)−5− = 13 = 9+3+6+5−.

- پاسخ اول: برای همه‌ی عددهای منفی علامت «+» گذاشته است؛ جمع با عدد منفی مقدار را کم می‌کند و حاصل 17− کوچک است.
- پاسخ دوم: علامت «−» را برای عدد ۳ هم گذاشته و حاصل را کم کرده است؛ نتیجه 23− کوچک‌ترین مقدار است.
- پاسخ چهارم: برای عدد 6− علامت «+» گذاشته است؛ اگر به جای آن «−» بگذارد ۱۲ واحد بیشتر می‌شود. حاصل آن 1 است و از 13 کوچک‌تر است.

۱۳ صفحه ۵ تمرین

۱ــ عددهای خواسته‌شده را بنویسید.

الف) عددهای صحیح بین 3 و 5− را بنویسید.

ب) عددهای صحیح کوچک‌تر از 4− را بنویسید.

ج) عددهای صحیح بزرگ‌تر از 3− را بنویسید.

- الف) 4−, 3−, 2−, 1−, 0, 1, 2
- ب) ..., 8−, 7−, 6−, 5−
- ج) ..., 3, 2, 1, 0, 1−, 2−

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۴ صفحه ۵ تمرین

۲ــ مانند نمونه، جدول را کامل کنید (عددهای داده‌شده را در دسته‌های طبیعی و صحیح قرار دهید).

عددهای طبیعی (... ,1, 2, 3) هم صحیح‌اند. عددهای صحیح شامل طبیعی‌ها، صفر و قرینه‌ی طبیعی‌هاست. مثلاً: 3 و 2 = (2−)− طبیعی و صحیح؛ 0 صحیح ولی غیرطبیعی؛ 4− صحیح؛ 0.7 نه طبیعی است و نه صحیح.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵ صفحه ۵ تمرین

۳ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

−8+7−6+8−7+6 = −8+6−12+14−20+22 =

3−(2−(1−7)−1) = 12−22+32−42 =

−8−4÷2 = 3−4×5 =

- $-8+6-12+14-20+22 = (-8+6)+(-12+14)+(-20+22) = -2+2+2 = 2$
- $-8+7-6+8-7+6 = 0$
- $12-22+32-42 = (12-22)+(32-42) = -10-10 = -20$
- $3-(2-(1-7)-1) = 3-(2+6-1) = 3-7 = -4$
- $3-4\times5 = 3-20 = -17$
- $-8-4\div2 = -8-2 = -10$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۶ صفحه ۵ تمرین

۴ــ هریک از عبارت‌های زیر چه عددی را نشان می‌دهد؟

بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی؛ کوچک‌ترین عدد طبیعی؛ کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت؛ کوچک‌ترین عدد زوج طبیعی؛ کوچک‌ترین عدد فرد طبیعی دورقمی؛ بزرگ‌ترین عدد زوج طبیعی سه‌رقمی.

عبارت	عدد
بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی	-1
کوچک‌ترین عدد طبیعی	1
کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت	1
کوچک‌ترین عدد زوج طبیعی	2
کوچک‌ترین عدد فرد طبیعی دورقمی	11
بزرگ‌ترین عدد زوج طبیعی سه‌رقمی	998

۱۷ صفحه ۵ تمرین

۵ــ جدول زیر را کامل کنید؛ طوری که حاصل جمع عددهای هر ردیف با مجموع عددهای هر ستون و هر قطر مساوی باشد.

ابتدا از ردیف، ستون یا قطری که دو عدد آن معلوم است، مجموع مشترک را به دست می‌آوریم (مجموع هر ردیف سه برابر عدد وسط جدول است). سپس خانه‌های خالی هر خط را با کم‌کردن عددهای معلوم از مجموع پر می‌کنیم و برای خانه‌های بعدی همین کار را تکرار می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

توشه ای برای موفقیت

۱۸ صفحه ۶ فعالیت

۱ــ نقطه‌هایی که روی محور مشخص شده‌اند، چه عددهایی را نشان می‌دهند؟

۲ــ قرینه‌ی هر عدد را روی محور پیدا، و تساوی‌ها را مانند نمونه، کامل کنید: قرینه‌ی 1/2، قرینه‌ی 2، قرینه‌ی 3/4 و ...

۳ــ به این ترتیب، می‌توانید قرینه‌ی همه‌ی کسرهایی را که با آنها آشنا شده‌اید بنویسید: قرینه‌ی صفر، قرینه‌ی 12/5، قرینه‌ی 9/10-، قرینه‌ی 0.01.

قرینه‌ی هر عدد روی محور، نقطه‌ی هم‌فاصله با آن نسبت به صفر در سمت دیگر است. در هر قسمتی از محور که فاصله‌ی دو عدد صحیح به چند قسمت مساوی تقسیم شده، هر نقطه کسری با مخرج همان تعداد قسمت‌هاست.

- قرینه‌ی 1/2 برابر 1/2- و قرینه‌ی 1/2- برابر 1/2 است.
- قرینه‌ی صفر خود صفر است: 0.
- قرینه‌ی 12/5 برابر 12/5-، قرینه‌ی 9/10- برابر 9/10 و قرینه‌ی 0.01 برابر 0.01- است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹ صفحه ۶ فعالیت

۴ــ کسرها را به عدد مخلوط و عدد مخلوط را به کسر تبدیل کنید.

برای تبدیل عدد مخلوط به کسر، صحیح را در مخرج ضرب و با صورت جمع می‌کنیم؛ مثلاً 1 3/4 = (4×1+3)/4 = 7/4. برای تبدیل کسر به عدد مخلوط، صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم؛ مثلاً 14/3 = 4 2/3 و -7/5 = -1 -2/5.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰ صفحه ۶ فعالیت

۵ــ نقطه‌هایی که روی محور مشخص شده‌اند، چه عددهایی را نمایش می‌دهند؟ از این عددها، کدام صحیح و کدام غیرصحیح‌اند؟

نقطه‌هایی که بر یکی از نشانه‌های ... -2, -1, 0, 1, 2 منطبق‌اند عددهای صحیح‌اند و نقطه‌هایی که بین دو نشانه‌ی صحیح قرار می‌گیرند (مثل 1/2 و 3/2-) غیرصحیح‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱ صفحه ۷ فعالیت

۶ــ الف) نقطه‌های مشخص‌شده‌ی روی محورها چه کسرهایی را نشان می‌دهند؟ آیا این سه کسر با هم مساوی‌اند؟ نتیجه را به صورت تساوی کسرها بنویسید.

ب) تساوی کسرهای زیر را روی محور نمایش دهید: $-3/6 = -2/4 = -1/2$

هر سه نقطه روی محور بر هم منطبق‌اند؛ پس این کسرها مساوی‌اند: $-3/6 = -2/4 = -1/2$. در محور اول فاصله‌ی ۰ تا ۱- به ۲ قسمت، در محور دوم به ۴ قسمت و در محور سوم به ۶ قسمت مساوی تقسیم شده و نقطه‌ی مورد نظر به ترتیب ۱، ۲ و ۳ قسمت از صفر فاصله دارد.

برای نمایش، فاصله‌ی ۰ تا ۱- را به ۲، ۴ و ۶ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و در هر محور، نقطه‌ی $-1/2$، $-2/4$ و $-3/6$ را (به ترتیب ۱، ۲ و ۳ قسمت به سمت چپ صفر) علامت می‌زنیم؛ هر سه یک نقطه‌اند.

۲۲ صفحه ۷ فعالیت

۷ــ مقدار x را به دست آورید.

در هر تساوی کسرها، کسر مجهول را با کسر مساوی‌اش (ساده‌شده یا گسترش‌یافته) مقایسه می‌کنیم. مثلاً $-1/4 = -3/12$ و $-2/3 = -4/6$ و $-5/2 = -15/6$؛ پس مقدار x را از مساوی‌بودن صورت‌ها و مخرج‌ها به دست می‌آوریم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳ صفحه ۷ کار در کلاس

۱ــ کسرهای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$= -6/108 = 66/42 = -90/126$

- $-1/18 = -6/108$ (صورت و مخرج را بر ۶ تقسیم می‌کنیم)
- $11/7 = 66/42$ (بر ۶)
- $-5/7 = -90/126$ (بر ۱۸)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴ صفحه ۷ کار در کلاس

۲ــ عقربه چه عددی را نشان می‌دهد؟ بنویسید.

با شمردن قسمت‌های مساوی بین دو عدد صحیح، عقربه روی کسری با مخرج برابر تعداد قسمت‌ها قرار می‌گیرد؛ مثلاً اگر ۳ قسمت از ۴ قسمت مساوی بین ۰ و ۱ پر شده باشد، عدد 3/4 است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵ صفحه ۷ کار در کلاس

۳ــ به کمک محور، عددهای زیر را از کوچک به بزرگ و از چپ به راست مرتب کنید.

برای مرتب‌کردن، هر عدد را روی محور می‌گذاریم؛ عددهای منفی در سمت چپ صفر و مثبت‌ها در سمت راست‌اند. از بین عددهای منفی، هر که از صفر دورتر است کوچک‌تر است. برای مقایسه‌ی کسرها مخرج‌ها را یکی می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۶ صفحه ۷ کار در کلاس

۴ــ در جای خالی علامت مناسب < یا > یا = بگذارید.

اگر دو عدد هم‌علامت باشند مخرج‌ها را یکی و صورت‌ها را مقایسه می‌کنیم؛ هر عدد مثبت از هر عدد منفی بزرگ‌تر است؛ و بین دو عدد منفی، عددی که قدر مطلق (فاصله از صفر) کوچک‌تر دارد بزرگ‌تر است. مثلاً $1/7 > -3/5$، $-0.25 > -1$، $-0.5 > -1$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۷ صفحه ۷ کار در کلاس

۵ــ هریک از عددها را در جدول زیر در جای خود قرار دهید و جدول را کامل کنید (بزرگ‌تر از ۲؛ بین ۱ و ۲؛ بین ۰ و ۱؛ بین −۱ و ۰؛ بین −۲ و −۱؛ بین −۳ و −۲؛ کوچک‌تر از −۳).

هر کسر را به عدد مخلوط یا اعشاری تبدیل می‌کنیم تا بین دو عدد صحیح متوالی قرار دهیم. مثلاً 17/10 = 1/7 بین ۱ و ۲؛ 2/5 = 5/2 بزرگ‌تر از ۲؛ −1/4 = −7/5 بین −۲ و −۱؛ −17/10 بین −۲ و −۱.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۸ صفحه ۸ فعالیت

۱ــ روی محور روبه‌رو فاصله‌ی بین عددهای ۱ و ۲ را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. نقطه‌ی مشخص‌شده چه عددی را نشان می‌دهد؟

۲ــ اگر فاصله‌ی عددهای ۱ و ۲ را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم، نقطه‌های مشخص‌شده چه عددهایی را نشان می‌دهند؟

۳ــ در شکل زیر، فاصله‌ی بین دو عدد ۱ و ۲ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. مانند نمونه مشخص کنید که هر نقطه چه عددی را نشان می‌دهد. (نمونه: 12/10 = 1.2)

۴ــ چگونه می‌توانیم بین دو عدد ۱ و ۲، تعداد بیشتری عدد کسری بنویسیم؟ توضیح دهید.

۵ــ آیا می‌توانیم بگوییم بین دو عدد ۱ و ۲ کسرهای بی‌شماری وجود دارد؟ آیا همین نتیجه را می‌توان برای عددهای 1- و 2- نیز تکرار کرد؟ بین هر دو عدد صحیح چند عدد کسری هست؟

۱

نقطه‌ی وسط ۱ و ۲ برابر 3/2 = 1 1/2 است.

۲

نقطه‌ها به ترتیب 4/3 = 1 1/3 و 5/3 = 1 2/3 هستند.

۳

نقطه‌ها به ترتیب 11/10 = 1.1، 12/10، 13/10، 14/10، 15/10، 16/10، 17/10، 18/10 و 19/10 هستند و اعشاری آنها 1.1، 1.2، ...، 1.9 است.

۴

فاصله‌ی بین دو عدد را به قسمت‌های مساوی بیشتری (مثلاً ۱۰۰ قسمت) تقسیم می‌کنیم؛ هر نقطه‌ی تقسیم یک کسر است، مانند 101/100 و 102/100 و ... .

۵

بله؛ هر چقدر فاصله را به قسمت‌های بیشتری تقسیم کنیم کسرهای تازه‌ای به دست می‌آیند و این کار پایانی ندارد. این نتیجه برای 1- و 2- هم درست است. بین هر دو عدد صحیح بی‌شمار عدد کسری وجود دارد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۹ صفحه ۸ کار در کلاس

با توجه به محورهای روبه‌رو و تقسیم‌شدن فاصله‌ی بین دو عدد ۰ و ۱-، کسرهای مختلفی بین این دو عدد بنویسید. توضیح دهید چگونه بین هر دو عدد کسری هم می‌توانیم کسرهای بی‌شماری پیدا کنیم.

مثلاً 1/2-، 1/3-، 2/3-، 1/4-، 3/4-، 1/10-، 9/10- و ... بین ۰ و 1- قرار دارند.

بین هر دو کسر، فاصله‌ی بین آنها را به قسمت‌های مساوی بیشتری تقسیم می‌کنیم (یا میانگین آنها را می‌گیریم)؛ هر نقطه‌ی تقسیم کسر تازه‌ای است. چون این کار بی‌پایان است، بین هر دو کسر بی‌شمار کسر هست.

۳۰ صفحه ۹ فعالیت

۱ــ چگونه می‌توانیم به کمک بردارهایی که در شکل نمایش داده شده‌اند، درستی تساوی‌ها را نتیجه بگیریم؟ توضیح دهید.

$-2/3 = (-3)\div 2 = 3\div(-2)$ و $-3/4 = (-4)\div 3 = 4\div(-3)$

۲ــ مانند نمونه، کسر مساوی هر کسر را بنویسید: $(-3)/2 = 3/(-2) = -2/3$؛ $-4/7$ و $-3/4$.

بردار به طول 2- را به ۳ قسمت مساوی تقسیم کنیم، هر قسمت 2/3- است؛ یعنی $-2/3 = 3\div(-2)$. از طرف دیگر بردار به طول 2 را اگر به صورت 3- قسمت (۳ قسمت در جهت مخالف) تقسیم کنیم همان بردار به دست می‌آید؛ پس $-2/3 = (-3)\div 2$. بنابراین جای علامت منفی در کسر (روی صورت، روی مخرج یا کنار کسر) تفاوتی در مقدار ایجاد نمی‌کند.

- $4/(-7) = (-4)/7 = -4/7$
- $3/(-4) = (-3)/4 = -3/4$

۳۱ صفحه ۹ تمرین

۱ــ آیا می‌توان گفت هر عدد صحیح و هر عدد طبیعی نیز عدد گویاست؟ چرا؟

بله. هر عدد صحیح یا طبیعی مانند a را می‌توان به صورت a/1 نوشت که صورت و مخرج آن عدد صحیح است و مخرج صفر نیست؛ پس طبق تعریف عدد گویاست. مثلاً 3/1 = 3، 5/1- = 5- و 0/1 = 0.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۳۲ صفحه ۹ تمرین

۲ــ هریک از کسرهای سطر اول را به کسر مساوی‌اش در سطر دوم وصل کنید.

- $-3/5 = (-3)/5 = 3/(-5)$
- $-3/4 = (-3)/4 = 3/(-4)$
- $3/5 = (-3)/(-5)$
- $3/4 = (-3)/(-4)$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۳ صفحه ۹ تمرین

۳ــ جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید (هر عدد از کدام نوع است: طبیعی، صحیح، گویا).

عدد	طبیعی	صحیح	گویا
6	✓	✓	✓
$-(-(+4)) = 4$	✓	✓	✓
$12/4 = 3$	✓	✓	✓
$-4/2 = -2$		✓	✓
$-230/100 = -2.30$			✓
$3/5$			✓
$-8/3$			✓

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۴ صفحه ۹ تمرین

۴ــ ابتدا علامت هر عبارت را تعیین، و سپس آن را ساده کنید.

$(-10/7)\times(2/(-25))\times(-8/12)\times(-18/16) =$

- حاصل‌ضرب دو عدد منفی مثبت است: $(8\times18)/(12\times16) = 144/192 = 3/4$
- حاصل‌ضرب دو عدد هم‌علامت (هر دو منفی) مثبت است: $(10\times2)/(7\times25) = 20/175 = 4/35$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۵ صفحه ۱۰ فعالیت

۱ــ با توجه به درس سال گذشته برای حرکت‌های روی محور، یک جمع عددهای صحیح بنویسید.

۲ــ با توجه به سؤال ۱، برای هر حرکت روی محور، عددی متناظر بنویسید.

۳ــ برای محورهای زیر مانند نمونه، یک جمع با عددهای گویا بنویسید. (نمونه: (3/2)+(3/2)+(−6/2))

هر حرکت روی محور یک عدد (جابه‌جایی) است: حرکت به راست مثبت و به چپ منفی. جمع همه‌ی جابه‌جایی‌ها، مکان نهایی نسبت به نقطه‌ی شروع را می‌دهد. مثلاً حرکت‌های 3/2، 3/2 به راست و 6/2 به چپ: 3/2+3/2+(−6/2) = 0.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۶ صفحه ۱۰ فعالیت

۴ــ عبارت‌های زیر را مانند نمونه به صورت جمع دو عدد گویا بنویسید.

−3/5−4/5 = −5/8−7/8 =

−2.3−5.8 = 0.5−0.85 =

25−18.4 = −12.3−(−7) =

- −5/8−7/8 = −5/8+(−7/8) = −12/8 = −3/2
- −3/5−4/5 = −3/5+(−4/5) = −7/5
- 0.5−0.85 = 0.5+(−0.85) = −0.35
- −2.3−5.8 = −2.3+(−5.8) = −8.1
- −12.3−(−7) = −12.3+7 = −5.3
- 25−18.4 = 25+(−18.4) = 6.6

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۳۷ صفحه ۱۱ فعالیت

۵ــ مانند نمونه، عددها را ابتدا به‌طور تقریبی به نزدیک‌ترین عدد صحیح گرد کنید؛ سپس، حاصل عبارت را به دست آورید. (نمونه: 3 = 13+8+18− = 13+(8−)−18− ≈ 12.87+(8.001−)−17.9−)

حاصل دقیق نمونه 2.971 = 12.87+8.001−17.9 است که به 3 بسیار نزدیک است؛ پس گرد کردن راهی برای پیدا کردن تقریب و وارسی درستی حاصل است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۸ صفحه ۱۱ کار در کلاس

به کمک محور، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. ابتدا تفریق‌ها را به صورت جمع بنویسید.

(5/3+)−(4/3−) (9/5−)+(7/5) (5/2−)−(3/2−)

- 3− = 9/3− = (5/3−)+(4/3−) = (4/3−)−(5/3+)
- 2/5− = (9/5−)+(7/5)
- 1 = 2/2 = (5/2)+(3/2−) = (5/2−)−(3/2−)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳۹ صفحه ۱۲ فعالیت

۱ــ برای هرکدام از محورها یک تساوی جمع بنویسید (5/3 = 1/3+4/3 ...). حاصل عبارت 1/3+(4/3−) را به دست آورید و با حاصل جمع بالا مقایسه کنید. با توجه به تساوی‌های زیر توضیح دهید که چگونه می‌توانیم حاصل جمع و تفریق دو عدد گویا را با استفاده از جمع و تفریق دو عدد صحیح به دست آوریم.

۲ــ مانند نمونه، ابتدا مخرج‌ها را یکی کنید؛ سپس، جمع و تفریق‌ها را انجام دهید. (نمونه: 5/7−3/4 = 20/28−21/28 = 1/28−)

2/5−(2/3−) = 1/2−1/3 = 3/4+2/3 = 6/5+7/5 =

وقتی مخرج دو کسر یکی باشد، فقط صورت‌ها را مانند عددهای صحیح جمع یا تفریق می‌کنیم و مخرج را نگه می‌داریم: a/c+b/c = (a+b)/c و a/c−b/c = (a−b)/c. مثلاً 3/5+2/5 = (3+2−)/5 = 1/5−. اگر مخرج‌ها متفاوت باشند، ابتدا با گسترش کسرها مخرج مشترک می‌سازیم.

- 1− = 3/3− = 1/3+(4/3−)
- 6/5+7/5 = 13/5
- 3/4+2/3 = 9/12+8/12 = 1/12−

- $-1/2-1/3 = -3/6-2/6 = -5/6$
- $-2/5-(-2/3) = -6/15+10/15 = 4/15$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۰ صفحه ۱۲ کار در کلاس

۱ــ مانند نمونه، حاصل هریک از عبارت‌ها را به دست آورید. (نمونه: $(-7/9)+(+4/9) = (-7+4)/9 = -3/9 = -1/3$)

$(-4/9)-(-7/9) = (+8/11)+(-6/11) = (+8/11)-(-6/11) = (-12/25)-(-6/5)$ =

- $(-7/9)-(-4/9) = (-7+4)/9 = -3/9 = -1/3$
- $(-6/11)+(+8/11) = 2/11$
- $(-6/11)-(+8/11) = -14/11$
- $(-6/5)-(-12/25) = -30/25+12/25 = -18/25$

۴۱ صفحه ۱۳ کار در کلاس

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. حالا مانند نمونه، هر عدد مخلوط را به صورت دو عدد صحیح و کسری درآورید و با هم جمع کنید. (نمونه: $(-1/2)+1- = 1\ 1/2-$)

هر عدد مخلوط مثبت یا منفی را به جمع قسمت صحیح و قسمت کسری آن (هم‌علامت با خودش) می‌نویسیم؛ مثلاً $3\ 4/7 = 3+4/7 = 25/7$ و $-3\ 3/4 = -3+(-3/4) = -15/4$. سپس عددها را جمع می‌کنیم: $(-3\ 4/7)+4/7 = 0$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۲ صفحه ۱۳ تمرین

۱ــ حاصل عبارت‌ها را به دست آورید.

۲ــ حاصل عبارت‌ها را به دست آورید: = 75+25-، = 3+9-، = 12-7 و = 0.25+0.75-، = 0.3+0.9-، 1.2-0.7 =. بین این تساوی‌ها چه رابطه‌ای می‌بینید؟

۳ــ حاصل عبارت‌ها را به دست آورید: 15.4-12.8، 7.2+2.5-، 3.7-4.1-.

تمرین ۲: 50 = 75+25-، 6- = 3+9-، 5- = 12-7؛ 0.5 = 0.75+0.25-، 0.6- = 0.3+0.9-، 0.5- = 1.2-0.7.

هر عبارت اعشاری، برابر عبارت صحیح متناظرش تقسیم‌بر ۱۰۰ (یا ۱۰) است؛ یعنی همان محاسبه است با جابه‌جایی ممیز.

برای تمرین‌های ۱ و ۳ مخرج مشترک می‌گیریم و صورت‌ها را مانند عددهای صحیح جمع یا تفریق می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۳ صفحه ۱۳ تمرین

۴ــ به کمک الگویابی، جاهای خالی شکل را پر کنید.

در شکل، هر عدد برابر حاصل جمع دو عدد زیر آن (یا حاصل‌تفریق دو عدد کناری) است؛ با این ویژگی جاهای خالی از پایین به بالا یا از بالا به پایین یکی‌یکی پر می‌شوند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۴ صفحه ۱۴ فعالیت

۱ــ مانند نمونه، ضرب عددهای گویا را به ضرب عددهای صحیح تبدیل کنید. با توجه به حاصل عبارت‌ها، جدول را برای ضرب دو عدد گویا کامل کنید. (نمونه: 1/2- = 6/12- = (4×3)/(2×3-) = (3/4+)×(2/3-))

(5/7+)×(3/4-) = (4/7-)×(2/9-) = (10/9)×(3/5) (9/4)×(4/3-)

۲ــ با توجه به جدول بالا، ابتدا علامت حاصل ضرب را تعیین کنید؛ سپس، مانند نمونه با ضرب کسرها حاصل را پیدا کنید.

قاعده‌ی علامت در ضرب

ضرب	علامت حاصل
مثبت × مثبت	+
منفی × منفی	+
مثبت × منفی	−
منفی × مثبت	−

- $(-3/4)\times(+5/7) = -15/28$
- $(-2/9)\times(-4/7) = +8/63$
- $(3/5)\times(10/9) = 30/45 = 2/3$
- $(-4/3)\times(9/4) = -36/12 = -3$

برای ضرب دو عدد گویا، علامت را از قاعده‌ی عددهای صحیح تعیین می‌کنیم و صورت‌ها را در هم و مخرج‌ها را در هم ضرب می‌کنیم (در صورت امکان قبل از ضرب ساده می‌کنیم).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۵ صفحه ۱۴ کار در کلاس

با توجه به نتیجه‌ای که از فعالیت قبل گرفته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$(-4/7)\times(+3/5)$، $(-5/7)\times(+2/3)$، $(-21/8)\times(-6/35)$، $(\ldots/12+)\times(-4/7)$، $(-0.1)\times1.2-$

- $(+3/5)\times(-4/7) = -12/35$
- $(+2/3)\times(-5/7) = -10/21$
- $(-6/35)\times(-21/8) = +126/280 = 9/20$
- $(-1.2)\times(-0.1) = 0.12$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۴۶ صفحه ۱۵ فعالیت

۱ــ معکوس کسر 2/3 برابر 3/2 است. معکوس عددهای گویای زیر را بنویسید: 3/5−، 2/7، 3−، 12/3−، 0.1، 1 1/4، 1−. مانند نمونه هر عدد بالا را در معکوس خود ضرب کنید و حاصل را به دست آورید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

عدد	معکوس	حاصل‌ضرب
3/5−	5/3−	1
2/7	7/2	1
3−	1/3−	1
4− = 12/3−	1/4−	1
1/10 = 0.1	10	1
5/4 = 1 1/4	4/5	1
1−	1−	1

حاصل‌ضرب هر عدد گویای غیرصفر در معکوس خود همیشه 1 است.

۴۷ صفحه ۱۵ فعالیت

۲ــ همان‌طور که می‌دانید، تقسیم را می‌توانیم به ضرب تبدیل کنیم؛ پس، مانند نمونه ابتدا علامت حاصل تقسیم را بگذارید و سپس آن را به ضرب دو عدد تبدیل کنید. (نمونه: − = (5/7)÷(2/3)− = (−5/7)÷(+2/3) = (2/3)×(7/5)) −14/15

= (−8/21)÷(−6/35) = (+10/18)÷(−15/12)

- (−6/35)÷(−8/21) = +(6/35)×(21/8) = 126/280 = 9/20
- (−15/12)÷(+10/18) = −(15/12)×(18/10) = −270/120 = −9/4

برای تقسیم عددهای گویا، عدد اول را در معکوس عدد دوم ضرب می‌کنیم و علامت را مانند ضرب تعیین می‌کنیم.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۴۸ صفحه ۱۵ فعالیت

۳ــ جاهای خالی را با کسر مناسب پر کنید.

$1 = \square \times -12/2$ ، $1 = \square \times -3/5$ ، $1 = \square \times 1\,1/4$ ، $\square \times 4/3$

جای خالی در هر حالت معکوس عدد داده‌شده است: $-6 = -12/2$ و معکوس آن $-1/6$؛ معکوس $-3/5$ برابر $-5/3$؛ معکوس $5/4 = 1\,1/4$ برابر $4/5$؛ و معکوس $4/3$ برابر $3/4$ است. صفر تنها عددی است که معکوس ندارد، چون کسری که مخرج آن صفر باشد تعریف نشده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴۹ صفحه ۱۶ کار در کلاس

۱ــ حاصل تقسیم‌های زیر را حساب کنید.

$(-8)\div(-8/9)$، $(-7/7)\div(-4/5)$، $(-3/...)\div(-3/8)$، $(-1/3)\div 2$، $(-5)\div(+0.4)$، $4\div -0.8$

۲ــ طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید. معکوس $-5/7$، معکوس 4، معکوس $2/3$ ... حاصل تقسیم عدد یک بر هر عدد غیرصفر چیست؟ توضیح دهید.

- $(-8/9)\div(-8) = (8/9)\times(1/8) = 1/9$
- $2\div(-1/3) = 2\times(-3) = -6$
- $(+0.4)\div(-5) = -0.08$
- $-0.8\div 4 = -0.2$

حاصل تقسیم 1 بر هر عدد غیرصفر برابر معکوس آن عدد است: $1\div a = 1/a$؛ مثلاً $1\div(-5/7) = -7/5$ و $1\div 4 = 1/4$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۰ صفحه ۱۶ فعالیت

۱ــ کسرهای زیر را مانند نمونه و به کمک ماشین‌حساب به عددهای اعشاری تبدیل کنید. (نمونه: 2/5 = 2÷5 = 0.4)

1/3 = 3/7 = 1/8 = 4/5 = 5/6 =

بین عددهای حاصل چه تفاوتی مشاهده می‌کنید؟ آیا می‌توانید کسرها را طبقه‌بندی کنید؟

۲ــ مانند نمونه، ضرب یک کسر در معکوسش را روی شکل نشان دهید. چگونه می‌توانیم از روی شکل نشان دهیم که حاصل‌ضرب کسر در معکوسش، یک می‌شود؟

کسر	عدد اعشاری
1/3	0.333... (دوره‌ی ۳)
3/7	0.428571... (دوره‌ی ۴۲۸۵۷۱)
1/8	0.125 (ختم‌شونده)
4/5	0.8 (ختم‌شونده)
5/6	0.8333... (دوره‌ی ۳)

کسرهایی مانند 1/8 و 4/5 عدد اعشاری پایان‌پذیر (ختم‌شونده) دارند، ولی 1/3، 3/7 و 5/6 اعشاری پایان‌ناپذیر و دوره‌ای دارند (رقم‌ها تکرار می‌شوند). کسرها را بر همین اساس به دو دسته تقسیم می‌کنیم.

برای ضرب 1 = 3/2×2/3: مستطیلی با طول 3/2 و عرض 2/3 می‌کشیم؛ مساحت آن برابر با مساحت یک مربع به ضلع ۱ (یک واحد مساحت) می‌شود، یعنی 1.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۱ صفحه ۱۷ تمرین

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

= (+8/17)−(−6/17)، (11/42)−(−12/35)، (−5/72)−(−2/63)، (−3/...)+(−7/12)، (−6/9)×(+2/11)،

(+1/12)×(−8/10)، (+5)÷8−، (−28)÷(−12)، (−28/27)÷(−7/9)، 1.2÷2.4−

- (−6/17)−(+8/17) = −14/17
- −8÷(+5) = −8/5 = −1.6
- (−12)÷(−28) = 12/28 = 3/7
- (−7/9)÷(−28/27) = (7/9)×(27/28) = 189/252 = 3/4
- −2.4÷1.2 = −2

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۲ صفحه ۱۷ تمرین

۲ــ عددهای زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

علامت‌ها را ساده می‌کنیم (a = (−a)−) و صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین شمارنده‌ی مشترکشان (ب.م.م) تقسیم می‌کنیم تا کسر تحویل‌ناپذیر شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۳ صفحه ۱۷ تمرین

۳ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید (عبارت‌هایی شامل ضرب، تقسیم، جمع و تفریق کسرها).

ترتیب عملیات: ابتدا پرانتزها، سپس ضرب و تقسیم (از چپ به راست) و در پایان جمع و تفریق. هر تقسیم را به ضرب در معکوس و سپس جمع و تفریق را با مخرج مشترک انجام می‌دهیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۴ صفحه ۱۸ تمرین ترکیبی

۱ــ عددهای گویا را روی محور نمایش دهید: (2/3−)−، 1−، 1 1/4، 5/2− و ...

2/3 = (2/3−)− بین ۰ و ۱؛ 1− روی نشانه‌ی ۱−؛ 5/4 = 1 1/4 یک‌چهارم بعد از ۱؛ 1 1/2 2− = 5/2− وسط ۲− و ۳−.

هر کدام را با تقسیم فاصله‌ی دو عدد صحیح متوالی به قسمت‌های مساوی روی محور می‌گذاریم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۵۵ صفحه ۱۸ تمرین ترکیبی

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

ترتیب عملیات: پرانتز، ضرب و تقسیم، سپس جمع و تفریق؛ در کسر مرکب صورت و مخرج را جدا حساب و بعد تقسیم می‌کنیم؛ مثلاً 1/3 = (3/2)/(1/2) = (1+1/2)/(1−1/2).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

گام به گام ریاضی هشتم - فصل دوم

عددهای اول

فهرست

۵۶ صفحه ۲۰ · فعالیت — تقسیم به گروه‌های مساوی ۳۰

۵۷ صفحه ۲۰ · فعالیت — آرایش‌های مستطیلی ۳۰

۵۸ صفحه ۲۰ · فعالیت — تجزیه با نمودار درختی ۳۱

۵۹ صفحه ۲۱ · کار در کلاس — عددهای مرکب بین ۱۵ و ۳۰ ..... ۳۲

۶۰ صفحه ۲۱ · فعالیت — ۱ اول است؟ دسته‌بندی عددها ۳۲

۶۱ صفحه ۲۱ · فعالیت — سه دسته‌ی عددهای طبیعی ۳۳

۶۲ صفحه ۲۱ · فعالیت — مضرب‌های ۲ و ۳ و ۴ ..... ۳۳

۶۳ صفحه ۲۱ · فعالیت — مضرب‌های عدد طبیعی مرکب‌اند؟ ۳۳

۶۴ صفحه ۲۲ · کار در کلاس — تشخیص عددهای مرکب ۳۴

۶۵ صفحه ۲۲ · فعالیت — ب.م.م و عددهای نسبت به هم اول ۳۵

۶۶ صفحه ۲۲ · فعالیت — دو عدد اول متفاوت ۳۵

۶۷ صفحه ۲۲ · فعالیت — مثال‌هایی از نسبت به هم اول ۳۵

۶۸ صفحه ۲۳ · تمرین — چهار پاسخ برای ب.م.م برابر ۱ ..... ۳۶

۶۹ صفحه ۲۳ · تمرین — عددهای اول بین ۴۰ و ۶۰ ..... ۳۶

۷۰ صفحه ۲۳ · تمرین — تعداد عددهای مرکب کمتر از ۲۰ ..... ۳۶

۷۱ صفحه ۲۳ · تمرین — هر عدد طبیعی دست‌کم ۲ شمارنده دارد؟ ۳۷

۷۲ صفحه ۲۳ · تمرین — مجموع دو عدد اول برابر ۹۹ ..... ۳۷

۷۳ صفحه ۲۳ · تمرین — عددهایی با شمارنده‌های اول ۲ و ۳ ..... ۳۷

۷۴ صفحه ۲۴ · فعالیت — غربال عددهای ۱ تا ۵۰ ..... ۳۸

۷۵ صفحه ۲۴ · فعالیت — ادامه‌ی غربال: مضرب‌های ۵ و ۶ و ۷ ..... ۳۸

۷۶ صفحه ۲۵ · فعالیت — پایان غربال ۱ تا ۵۰ ..... ۳۹

۷۷ صفحه ۲۵ · کار در کلاس — دنبال کردن نمودار غربال برای n = 40 ..... ۴۰

۷۸ صفحه ۲۶ · فعالیت — اول بودن ۴۷ ..... ۴۰

۷۹ صفحه ۲۶ · کار در کلاس — بررسی اول بودن ۹۷، ۱۳۱ و ۱۴۳ ..... ۴۱

۸۰ صفحه ۲۷ · تمرین — غربال ۱ تا ۶۰ ..... ۴۱

۸۱ صفحه ۲۷ · تمرین — ۱۰۷ و ۲۵۱ اول‌اند یا مرکب؟ ۴۲

۸۲ صفحه ۲۷ · تمرین — عددهای کمتر از ۱۰۰ و تقسیم بر ۲، ۳، ۵، ۷ ..... ۴۲

۸۳ صفحه ۲۷ · تمرین — حداکثر تعداد تقسیم‌ها بین ۱۰۰ و ۱۲۰ ..... ۴۳

۸۴ صفحه ۲۷ · تمرین — غربال ۱ تا ۱۰۰ و پرسش‌ها ۴۳

۸۵ صفحه ۲۸ · تمرین ترکیبی — مرکب بدون شمارنده‌ی اول دیگر و نسبت به هم اول ۴۴

۸۶ صفحه ۲۸ · تمرین ترکیبی — غربال برای عددهای ۲۰ تا ۴۰ ..... ۴۴

۸۷ صفحه ۲۸ · تمرین ترکیبی — آیا ۱۳۷ اول است؟ ۴۴

۸۸ صفحه ۲۸ · تمرین ترکیبی — دو عدد مرکب نسبت به هم اول ۴۴

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۵۶ صفحه ۲۰ فعالیت

۱ــ می‌خواهیم ۱۹ نفر از دانش‌آموزان را برای کارهای مختلف به گروه‌هایی تقسیم کنیم. آیا می‌توانیم این تعداد را به گروه‌های مساوی تقسیم کنیم؟ اگر تعداد دانش‌آموزان ۷ نفر باشد، چه گروه‌هایی می‌توانیم تشکیل دهیم؟ همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید. اگر تعداد آنها ۱۵ نفر باشد چه گروه‌هایی می‌توانیم تشکیل دهیم؟

۱۹ نفر

۱۹ فقط بر 1 و 19 بخش‌پذیر است؛ پس فقط می‌توان یک گروه ۱۹ نفره یا ۱۹ گروه تک‌نفره ساخت. گروه‌بندی با اندازه‌ی مساوی دیگری ممکن نیست.

۷ نفر

شمارنده‌های ۷ فقط 1 و 7 است؛ پس یا یک گروه ۷ نفره یا ۷ گروه تک‌نفره.

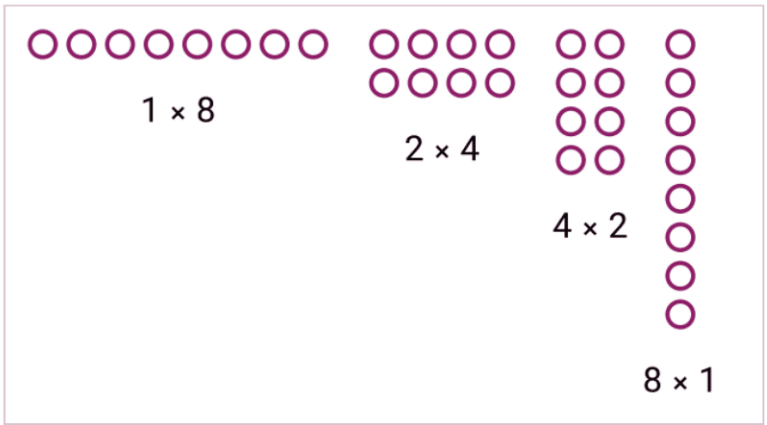
۱۵ نفر

شمارنده‌های ۱۵ برابر 1, 3, 5, 15 است؛ پس گروه‌بندی‌های مساوی ممکن عبارت‌اند از: ۱۵ گروه تک‌نفره، ۵ گروه ۳ نفره، ۳ گروه ۵ نفره و یک گروه ۱۵ نفره.

۵۷ صفحه ۲۰ فعالیت

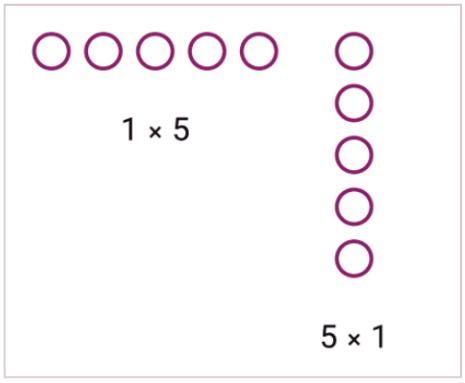
۲ــ تعدادی از سربازان می‌خواهند رژه بروند. فرمانده‌ی آنها آرایش‌های مستطیلی مختلف برای گروه‌های ۶ نفره را کشیده است: 6×1، 3×2، 2×3، 1×6. شما هم برای ۸ نفر آرایش‌های مستطیلی مختلف رسم کنید. برای ۵ نفر هم آرایش‌های ممکن را رسم کنید. کدام عددها فقط ۲ آرایش مستطیلی دارند؟

۸ نفر



۵ نفر

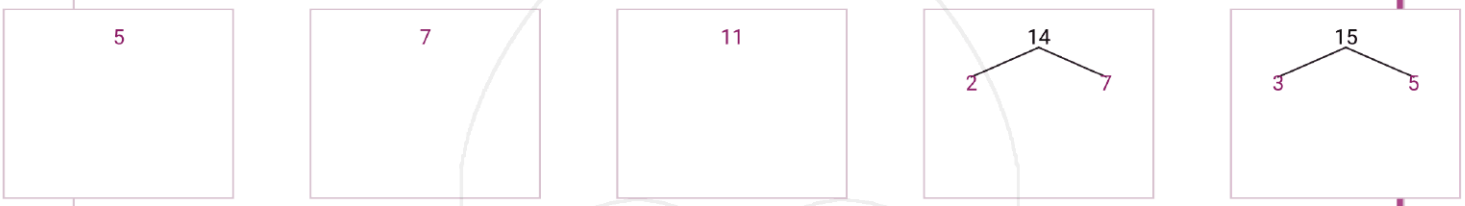
ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



عددهایی که فقط ۲ آرایش مستطیلی دارند، دقیقاً دو شمارنده‌ی 1 و خودشان را دارند؛ مثل 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... این عددها «اول» هستند.

۵۸ صفحه ۲۰ **فعالیت**

۳ــ مانند نمونه‌ها با رسم نمودارهای درختی، عددهای 15، 11، 14، 7 و 5 را به صورت ضرب شمارنده‌های اول بنویسید (تجزیه کنید). نمونه: 3 × 2 × 2 = 12 و 3 × 2 = 6.



5 | 7 | 11 | 7 × 2 = 14 | 5 × 3 = 15

- 15 = 3 × 5
- 14 = 2 × 7
- 11، 7 و 5 اول‌اند و بیشتر تجزیه نمی‌شوند؛ هر کدام فقط خودش است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۵۹ صفحه ۲۱ کار در کلاس

همه‌ی عددهای مرکب بین 15 و 30 را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک بنویسید.

عدد	ضرب
16	2×8 (یا 4×4)
18	2×9 (یا 3×6)
20	2×10 (یا 4×5)
21	3×7
22	2×11
24	4×6 (یا 2×12)
25	5×5
26	2×13
27	3×9
28	4×7 (یا 2×14)

عددهای 17, 19, 23, 29 اول‌اند و به این صورت نوشته نمی‌شوند.

۶۰ صفحه ۲۱ فعالیت

۱ــ عددهای طبیعی از ۱ تا ۲۰ را بنویسید و دور عددهای اول خط بکشید. آیا عدد ۱ اول است؟ چرا؟ آیا عدد ۱ مرکب است؟ چرا؟

عددهای اول از ۱ تا ۲۰: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 (هشت عدد).

عدد ۱ اول نیست؛ زیرا تنها یک شمارنده دارد (خودش)، در حالی که عدد اول باید بزرگ‌تر از یک باشد و فقط دو شمارنده‌ی 1 و خودش را داشته باشد.

عدد ۱ مرکب هم نیست؛ زیرا نمی‌توان آن را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک نوشت.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶۱ صفحه ۲۱ فعالیت

۲ــ با توجه به سؤال بالا، عددهای طبیعی را به سه دسته تقسیم کنید و ویژگی‌های هر کدام را بنویسید.

- **عدد ۱:** فقط یک شمارنده دارد؛ نه اول است نه مرکب.
- **عددهای اول:** بزرگ‌تر از ۱ هستند و فقط دو شمارنده‌ی 1 و خودشان را دارند؛ مثل 2, 3, 5, 7.
- **عددهای مرکب:** بیش از دو شمارنده دارند و می‌توان آنها را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ نوشت؛ مثل 4, 6, 8, 9.

۶۲ صفحه ۲۱ فعالیت

۳ــ مضرب‌های طبیعی عدد ۲ به صورت ... 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, نوشته شده است. در صورت امکان آنها را مانند نمونه به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بنویسید. به همین ترتیب مضرب‌های طبیعی عددهای ۳ و ۴ را بنویسید و در صورت امکان به صورت ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ بنویسید.

مضرب‌های ۲

2 (امکان‌پذیر نیست؛ اول است)، $2 \times 2 = 4$، $2 \times 3 = 6$، $2 \times 4 = 8$، $2 \times 5 = 10$، $2 \times 6 = 12$، $2 \times 7 = 14$، ...

مضرب‌های ۳

3 (اول است)، $3 \times 2 = 6$، $3 \times 3 = 9$، $3 \times 4 = 12$، $3 \times 5 = 15$، $3 \times 6 = 18$، ...

مضرب‌های ۴

$2 \times 2 = 4$، $2 \times 4 = 8$، $3 \times 4 = 12$، $4 \times 4 = 16$، $4 \times 5 = 20$، $4 \times 6 = 24$، ... (همه قابل نوشتن‌اند).

۶۳ صفحه ۲۱ فعالیت

۴ــ با توجه به سؤال بالا، آیا می‌توانیم بگوییم همه‌ی مضرب‌های یک عدد طبیعی مرکب‌اند؟ چرا؟ (به این ترتیب عددهای طبیعی را می‌توان به سه بخش تقسیم کرد: عدد ۱، عددهای اول و عددهای مرکب.)

خیر. هر عدد طبیعی، مضرب خودش هم هست. اگر آن عدد اول باشد (مثل 2 یا 3) خودش یک مضرب اول است، پس همه‌ی مضرب‌ها مرکب نیستند. ولی مضرب‌های بزرگ‌تر از خود عدد اول (مانند $2 \times 3 = 6$) مرکب‌اند. همچنین مضرب‌های عدد ۱ شامل همه‌ی عددهای طبیعی‌اند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۴ صفحه ۲۲ کار در کلاس

۱ــ در بین عددهای 21، 31، 35، 47 و 49، عددهای مرکب را مشخص کنید.

۲ــ کدام عددهای طبیعی را می‌شناسید که همه‌ی مضرب‌هایشان عددهای مرکب باشند؟

۳ــ عدد ۱۷ چند مضرب دارد؟ چند تا از مضرب‌های آن عدد اول هستند؟

۴ــ اگر a یک عدد اول باشد، آیا همه‌ی مضرب‌هایش مرکب‌اند؟

۱

$7 \times 3 = 21$، $7 \times 5 = 35$ و $7 \times 7 = 49$ مرکب‌اند. 31 و 47 اول‌اند.

۲

هر عدد مرکب؛ مانند ... ,10 ,9 ,8 ,6 ,4. زیرا مضرب‌های یک عدد مرکب، خودشان مرکب‌اند (هر مضرب را می‌توان به صورت ضرب دو عدد بزرگ‌تر از ۱ نوشت).

۳

عدد ۱۷ بی‌شمار مضرب دارد (... ,68 ,51 ,34 ,17). از میان آنها فقط خود ۱۷ اول است؛ بقیه به صورت $17 \times k$ با $k \geq 2$ مرکب‌اند.

۴

خیر؛ فقط مضرب اولِ $a = a \times 1$ اول است و بقیه‌ی مضرب‌ها (... ,3a ,2a) مرکب‌اند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۶۵ صفحه ۲۲ فعالیت

۱ــ ب.م.م جفت عددهای داده‌شده را بنویسید: (2,8)، (3,9)، (1,4)، (18,12)، (5,12)، (15,4)، (3,5)، (24,25)، (18,25)، (7,8)، (3,3) (نمونه: 3 = (15,6)). اگر ب.م.م دو عدد برابر یک باشد، می‌گوییم آن دو عدد نسبت به هم اول‌اند.

جفت عدد	ب.م.م	جفت عدد	ب.م.م
(2,8)	2	(18,12)	6
(3,9)	3	(5,12)	1
(1,4)	1	(15,4)	1
(3,5)	1	(24,25)	1
(18,25)	1	(7,8)	1
(3,3)	3		

جفت‌هایی که ب.م.م آنها ۱ شد نسبت به هم اول‌اند.

۶۶ صفحه ۲۲ فعالیت

۲ــ دو عدد اول متفاوت انتخاب کنید و ب.م.م آنها را بنویسید. آیا می‌توان گفت هر دو عدد اول (متفاوت) نسبت به هم اول‌اند؟ چرا؟

مثلاً 1 = (5,7) یا 1 = (3,11).

بله؛ شمارنده‌های هر عدد اول فقط ۱ و خودش است. چون دو عدد متفاوت‌اند، تنها شمارنده‌ی مشترکشان ۱ است؛ پس ب.م.م آنها ۱ است.

۶۷ صفحه ۲۲ فعالیت

۳ــ یک عدد اول و یک عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشند.

۴ــ دو عدد مرکب مثال بزنید که نسبت به هم اول باشند.

۵ــ آیا دو عدد طبیعی متوالی نسبت به هم اول می‌شوند؟

۶ــ اگر دو عدد نسبت به هم اول باشند، ک.م.م آنها چگونه به دست می‌آید؟

۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

(7,10) = 1 یا (2,9) = 1.

۴

(8,9) = 1 یا (4,15) = 1.

۵

بله. هر شمارنده‌ی مشترک دو عدد n و n+1، تفاضل آنها یعنی ۱ را هم می‌شمارد؛ پس فقط ۱ می‌تواند باشد. مثلاً (14,15) = 1.

۶

ک.م.م آنها برابر حاصل‌ضرب دو عدد است؛ زیرا [a,b]×(a,b) = a×b و ب.م.م برابر ۱ است. مثلاً [8,9] = 72، که برابر 9×8 است.

---

۶۸ صفحه ۲۳ تمرین

۱ــ برای تساوی (□ ,4) = 1 چهار پاسخ مختلف به دست آورید.

هر عدد فرد پاسخ است، زیرا ۴ فقط شمارنده‌های ۱، ۲ و ۴ دارد و عدد فرد بر ۲ بخش‌پذیر نیست: (4,5) = 1، (4,7) = 1، (4,9) = 1، (4,11) = 1.

---

۶۹ صفحه ۲۳ تمرین

۲ــ عددهای اول بین دو عدد ۴۰ و ۶۰ را بنویسید.

41, 43, 47, 53, 59

---

۷۰ صفحه ۲۳ تمرین

۳ــ تعداد عددهای اول کمتر از ۲۰ هشت عدد است. تعداد عددهای مرکب کوچک‌تر از ۲۰ چندتاست؟ چرا؟

عددهای طبیعی کمتر از ۲۰، ۱۹ عدد (1 تا 19) هستند. از این ۱۹ عدد، ۸ عدد اول‌اند و عدد ۱ نه اول است نه مرکب. پس تعداد عددهای مرکب 10 = 1 – 8 – 19 است:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۱ صفحه ۲۳ تمرین

۴ــ آیا جمله‌ی زیر درست است؟ چرا؟ «هر عدد طبیعی دست‌کم ۲ شمارنده دارد.»

نادرست است. عدد ۱ فقط یک شمارنده (خودش) دارد.

۷۲ صفحه ۲۳ تمرین

۵ــ مجموع دو عدد اول ۹۹ است. آن دو عدد را مشخص کنید و توضیح دهید چگونه آنها را پیدا کردید.

مجموع دو عدد اول بزرگ‌تر از ۲، اگر هر دو فرد باشند، زوج می‌شود. چون ۹۹ فرد است، یکی از دو عدد باید زوج باشد و تنها عدد اول زوج ۲ است. پس عدد دیگر 97 = 2 − 99 است و ۹۷ اول است (بر ۲، ۳، ۵ و ۷ بخش‌پذیر نیست).

دو عدد: 2 و 97

۷۳ صفحه ۲۳ تمرین

۶ــ پنج عدد بنویسید که غیر از ۲ و ۳ شمارنده‌ی اول دیگری نداشته باشند.

۷ــ عددی در نظر بگیرید که ۴ و ۹ دو شمارنده‌ی آن باشند. حال شش عدد دیگر پیدا کنید که شمارنده‌های عدد مورد نظر باشند.

۶

مثلاً 6, 12, 18, 24, 36 (هر کدام فقط حاصل‌ضرب ۲ها و ۳هاست؛ 2, 3, 4, 8, 9 هم درست‌اند).

۷

کوچک‌ترین عدد با این ویژگی 36 = 9×4 است (چون ۴ و ۹ نسبت به هم اول‌اند). شمارنده‌های ۳۶ عبارت‌اند از 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36؛ شش شمارنده‌ی دیگر: 1, 2, 3, 6, 12, 18.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۷۴ صفحه ۲۴ **فعالیت**

می‌خواهیم عددهای اول از ۱ تا ۵۰ را تعیین کنیم. ابتدا عددهای ۱ تا ۵۰ را می‌نویسیم و سپس عددهای غیراول را خط می‌زنیم تا عددهای اول باقی بمانند. ۱ــ آیا عدد ۱ را خط زدید؟ چرا؟ ۲ــ آیا مضرب‌های عدد ۲ را خط می‌زنید؟ چرا؟ مضرب‌های مرکب عدد ۲ و سپس ۳ را خط بزنید. ۳ــ آیا لازم است مضرب‌های عدد ۴ را خط بزنیم؟ چرا؟

۱ــ بله، عدد ۱ را خط می‌زنیم؛ زیرا اول نیست.

۲ــ بله، خود ۲ را نگه می‌داریم (اول است) ولی مضرب‌های مرکب آن (4, 6, 8, ..., 50) را خط می‌زنیم؛ چون زوج‌اند و دست‌کم دو شمارنده‌ی بزرگ‌تر از ۱ دارند. پس از آن مضرب‌های مرکب ۳ (9, 15, 21, 27, 33, 39, 45 که هنوز خط نخورده‌اند) را هم خط می‌زنیم.

۳ــ خیر؛ زیرا اگر عددی مضرب ۴ باشد، پیش از آن به عنوان مضرب ۲ خط خورده است.

۷۵ صفحه ۲۴ **فعالیت**

۴ــ آیا مضرب‌های عدد ۵ را خط می‌زنید؟ چرا؟ مضرب‌های مرکب عدد ۵ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب ۵ که برای اولین بار خط می‌خورد کدام است؟

۵ــ آیا مضرب‌های عدد ۶ را خط می‌زنید؟ چرا؟

۶ــ آیا مضرب‌های عدد ۷ را خط می‌زنید؟ چرا؟

۷ــ مضرب‌های مرکب عدد ۷ را خط بزنید. کوچک‌ترین مضرب ۷ که برای اولین بار خط می‌خورد کدام است؟

۸ــ آیا مضرب‌های عددهای ۸ و ۹ و ۱۰ را خط می‌زنید؟

۴

بله؛ چون ۵ اول است و مضرب‌های مرکبش باید خط بخورند. مضرب‌های ۵ که هنوز خط نخورده‌اند: 25, 35 (بقیه مثل ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۴۵، ۵۰ قبلاً خط خورده‌اند). کوچک‌ترین مضرب ۵ که برای اولین بار خط می‌خورد 25 است.

۵

خیر؛ ۶ مرکب است و مضرب‌هایش پیش از این به عنوان مضرب ۲ (و ۳) خط خورده‌اند.

۶

بله؛ چون ۷ اول است و مضرب‌هایش باید بررسی شوند.

۷

مضرب‌های ۷: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49. از آنها فقط 49 قبلاً خط نخورده بود؛ پس کوچک‌ترین مضرب ۷ که برای اولین بار خط می‌خورد ۴۹ است (مضرب‌های کوچک‌تر ۷ با ۲، ۳ و ۵ خط خورده‌اند).

۸

خیر؛ ۸ و ۹ و ۱۰ مرکب‌اند و مضرب‌هایشان قبلاً به عنوان مضرب شمارنده‌های اولشان (۲ و ۳ و ۵) خط خورده‌اند.

۷۶ صفحه ۲۵ **فعالیت**

۹ــ اگر بخواهیم مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم، کدام مضرب ۱۱ برای اولین بار خط خواهد خورد؟

۱۰ــ به این ترتیب، آیا لازم است مضرب‌های عدد ۱۱ را خط بزنیم؟

۱۱ــ آیا عددهای باقی‌مانده اول هستند؟

۹

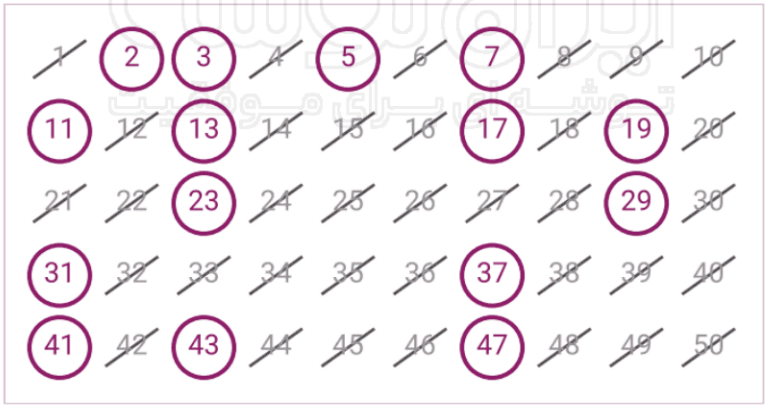
مضرب‌های ۱۱: 11×7, 11×5, 11×3, 11×2 (۲۲، ۳۳، ۵۵، ۷۷) همه قبلاً با ۲، ۳، ۵ و ۷ خط خورده‌اند؛ اولین مضربی که برای اولین بار خط می‌خورد 121 = 11×11 است که از ۵۰ بزرگ‌تر است.

۱۰

خیر؛ چون ۱۲۱ در بین عددهای ۱ تا ۵۰ نیست.

۱۱

بله. عددهای باقی‌مانده اول‌اند:

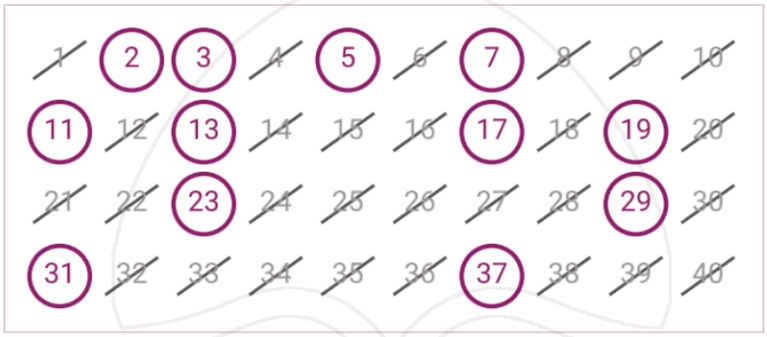


2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 (۱۵ عدد)

۷۷ صفحه ۲۵ **کار در کلاس**

نتایج فعالیت قبل، که به آن روش غربال می‌گویند، در نمودار صفحه خلاصه شده است. این نمودار را برای $n = 40$ دنبال کنید و همه‌ی مرحله‌ها را یک به یک انجام دهید. هر مرحله از نمودار را برای خود توضیح دهید.

1. عددهای 1 تا 40 را می‌نویسیم.
2. عدد ۱ را خط می‌زنیم.
3. اولین عدد خط‌نخورده ۲ است. مربع آن 4 در بین عددهاست؛ پس مضرب‌های بزرگ‌تر از ۲ را خط می‌زنیم (4, 6, 8, ..., 40).
4. عدد خط‌نخورده‌ی بعدی ۳ است. $3^2 = 9$ در بین عددهاست؛ پس 9, 15, 21, 27, 33, 39 را خط می‌زنیم.
5. بعدی ۵ است. $5^2 = 25 \leq 40$؛ پس 25, 35 را خط می‌زنیم.
6. بعدی ۷ است. $7^2 = 49 > 40$؛ مربع آن در بین عددها نیست و کار پایان می‌یابد.
7. عددهای خط‌نخورده، عددهای اول‌اند:



2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37

۷۸ صفحه ۲۶ **فعالیت**

می‌خواهیم مشخص کنیم ۴۷ اول است یا نه. مانند روش غربال فرض کنید عددهای ۱ تا ۴۷ نوشته شده‌اند. آیا ۴۷ با مضرب‌های ۲ خط می‌خورد؟ با انجام دادن چه عملی می‌توانید پاسخ دهید؟ آیا با مضرب‌های ۳ خط می‌خورد؟ آیا با مضرب‌های ۵ خط می‌خورد؟ آیا لازم است بررسی کنیم که ۴۷ با مضرب‌های ۷ خط می‌خورد یا نه؟ آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که عدد ۴۷ را فقط بر عددهای اول تقسیم می‌کنیم؟ چرا تقسیم کردن را تا عدد اولی که مربع آن از ۴۷ بزرگ‌تر شود ادامه می‌دهیم؟

- بر ۲: خیر. ۴۷ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم؛ $47 = 2 \times 23 + 1$ و باقی‌مانده ۱ است.
- بر ۳: خیر؛ $47 = 3 \times 15 + 2$ (باقی‌مانده ۲؛ مجموع ارقام ۱۱ بر ۳ بخش‌پذیر نیست).
- بر ۵: خیر؛ $47 = 5 \times 9 + 2$ (رقم یکان ۰ یا ۵ نیست).

ایران توشه
مشاوره‌ای موفقیت

- بر ۷: لازم نیست؛ چون $7^2 = 49 > 47$. اگر ۴۷ مضرب ۷ بود باید با مضرب‌های کوچک‌تر (۲، ۳، ۵) خط خورده بود، و اولین مضرب ۷ که تازه خط می‌خورد ۴۹ است.
- پس ۴۷ اول است.
- بله، فقط بر عددهای اول؛ زیرا اگر بر عددی مرکب بخش‌پذیر باشد، بر شمارنده‌های اول آن هم بخش‌پذیر است.
- اگر عددی مرکب مثل $n = a \times b$ باشد، دست‌کم یکی از دو شمارنده کوچک‌تر یا مساوی $\sqrt{n}$ است. پس اگر عدد بر هیچ عدد اولِ p با $p^2 \le n$ بخش‌پذیر نباشد، اول است و ادامه‌ی تقسیم لازم نیست.

۷۹ صفحه ۲۶ **کار در کلاس**

مانند نمونه بررسی کنید که عددهای ۹۷، ۱۳۱ و ۱۴۳ اول یا مرکب هستند. (نمونه برای ۹۷: چون $10^2 = 100 >$ 97 و $7^2 = 49 < 97$، باید آن را بر عددهای اول ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم. چون همه‌ی تقسیم‌ها باقی‌مانده دارند، ۹۷ اول است.)

۱۳۱: $11^2 = 121 < 131$ و $13^2 = 169 > 131$؛ باید بر ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تقسیم شود.

مقسوم‌علیه	۲	۳	۵	۷	۱۱
باقی‌مانده‌ی ۱۳۱	۱	۲	۱	۵	۹

همه باقی‌مانده دارند؛ پس ۱۳۱ اول است.

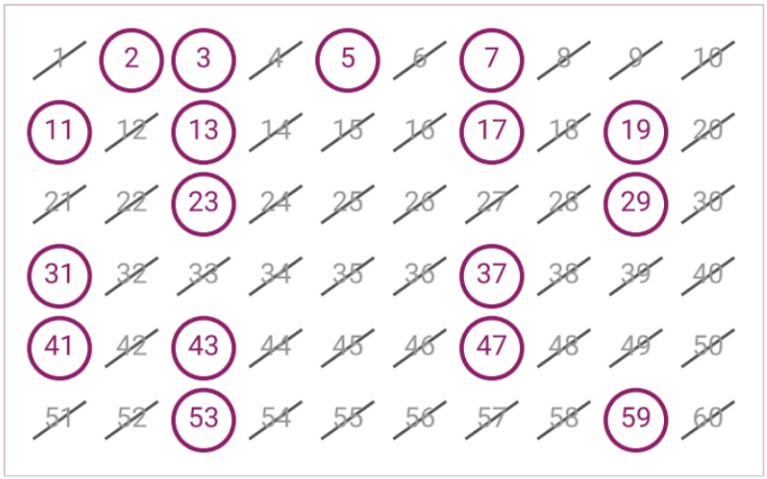
۱۴۳: بر ۲ (یکان ۳)، ۳ (مجموع ارقام ۸) و ۵ و ۷ ($3 + 20 \times 7 = 143$) بخش‌پذیر نیست، ولی $143 = 11 \times 13$ است؛ پس ۱۴۳ مرکب است.

۸۰ صفحه ۲۷ **تمرین**

۱ــ از روش غربال برای عددهای ۱ تا ۶۰ استفاده و عددهای اول کمتر از ۶۰ را پیدا کنید.

عدد ۱ را خط می‌زنیم، سپس مضرب‌های مرکب ۲، ۳، ۵ و ۷ را؛ چون $7^2 = 49 \le 60$ ولی $11^2 = 121 > 60$، کار با ۷ تمام می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



عددهای اول کمتر از ۶۰: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 (۱۷ عدد)

۸۱ صفحه ۲۷ تمرین

۲ــ مشخص کنید که عددهای ۱۰۷ و ۲۵۱ اول‌اند یا مرکب.

۱۰۷: $10^2 = 100 < 107 < 11^2 = 121$؛ پس بر ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم می‌کنیم. باقی‌مانده‌ها به ترتیب 1, 2, 2, 2 است (مثلاً $107 = 7 \times 15 + 2$). پس ۱۰۷ اول است.

۲۵۱: $15^2 = 225 < 251 < 16^2 = 256$؛ پس تا اولین عدد اول که مربعش بزرگ‌تر از ۲۵۱ است ($17^2 = 289$) یعنی بر ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱ و ۱۳ تقسیم می‌کنیم. باقی‌مانده‌ها به ترتیب 1, 2, 1, 6, 9, 4 است. پس ۲۵۱ اول است.

۸۲ صفحه ۲۷ تمرین

۳ــ «برای اینکه بفهمیم عددهای کمتر از ۱۰۰ اول‌اند یا نه، کافی است آنها را به عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷ تقسیم کنیم.» آیا این جمله درست است؟ چرا؟

درست است. اگر عددی کمتر از ۱۰۰ مرکب باشد، دست‌کم یک شمارنده‌ی اول کوچک‌تر یا مساوی $\sqrt{100} = 10$ دارد و عددهای اول کمتر از ۱۰ فقط ۲، ۳، ۵ و ۷ هستند. (به عبارت دیگر $11^2 = 121 > 100$.)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

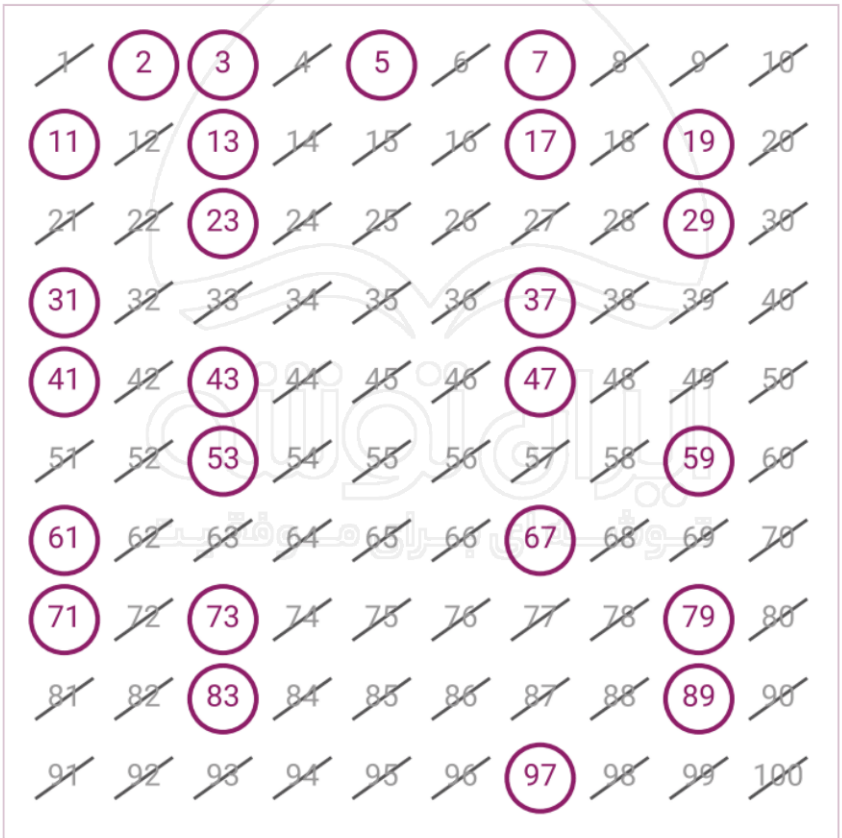
۸۳ صفحه ۲۷ تمرین

۴ــ عددی از ۱۲۰ کوچک‌تر و از ۱۰۰ بزرگ‌تر است. برای اینکه بفهمیم این عدد اول است یا نه، حداکثر چند تقسیم انجام می‌دهیم؟ چرا؟

حداکثر ۴ تقسیم؛ زیرا $120 < 121 = 11^2$ و $100 < 49 = 7^2$. پس کافی است عدد را بر عددهای اول 2, 3, 5, 7 تقسیم کنیم.

۸۴ صفحه ۲۷ تمرین

۵ــ عددهای ۱ تا ۱۰۰ را بنویسید و غربال کنید؛ سپس به پرسش‌ها پاسخ دهید: اولین عددی که خط خورد؛ در مرحله‌ی حذف مضرب‌های ۷، اولین مضرب ۷ که به عنوان مضرب سایر عددها خط نخورد؛ عددی که با مضرب‌های آن عدد ۲۴ خط خورد؛ تمام مضرب‌های ۵ که در مرحله‌ی حذف مضرب‌های ۵ برای اولین بار خط خوردند.



غربال تا ۷ ادامه می‌یابد؛ چون $100 < 121 = 11^2$. عددهای اول کمتر از ۱۰۰ همان ۲۵ عدد دایره‌دار شکل‌اند.

- اولین عددی که خط خورد: 1 (و اولین مضرب مرکب: 4).
- اولین مضرب ۷ که پیش‌تر خط نخورده بود: $7 \times 7 = 49$.
- عددی که ۲۴ با مضرب‌های آن خط خورد: 2 (۲۴ مضرب ۲ است و ابتدا با آن خط می‌خورد).

- مضرب‌های ۵ که برای اولین بار خط خوردند: 25, 35, 55, 65, 85, 95.

۸۵ صفحه ۲۸ تمرین ترکیبی

۱ــ یک عدد مرکب بنویسید که شمارنده‌های اول آن فقط ۲ و ۳ باشند. آیا این عدد و عددی که شمارنده‌های اول آن ۲ و ۵ است نسبت به هم اول‌اند؟ چرا؟

مثلاً $2\times2\times3 = 12$ و عددی با شمارنده‌های اول ۲ و ۵ مانند $2\times5 = 10$.

نسبت به هم اول نیستند؛ زیرا هر دو بر ۲ بخش‌پذیرند و ب.م.م آنها $(12,10) = 2$ است (نه ۱).

۸۶ صفحه ۲۸ تمرین ترکیبی

۲ــ با روش غربال، عددهای اول بین ۲۰ و ۴۰ را پیدا کنید. در این روش کار را از خط‌زدن مضرب‌های کدام عدد شروع می‌کنید و با مضرب‌های کدام عدد پایان می‌دهید؟

عددهای ۱ تا ۴۰ را می‌نویسیم و مضرب‌های مرکب ۲، ۳ و ۵ را خط می‌زنیم؛ چون $40 < 49 = 7^2$ پایان می‌دهیم.

عددهای اول بین ۲۰ و ۴۰: 23, 29, 31, 37.

کار را از مضرب‌های عدد 2 شروع می‌کنیم و با مضرب‌های عدد 5 پایان می‌دهیم.

۸۷ صفحه ۲۸ تمرین ترکیبی

۳ــ آیا عدد ۱۳۷ اول است؟ چرا؟

$137 < 121 = 11^2$ و $137 < 169 = 13^2$؛ پس بر ۲، ۳، ۵، ۷ و ۱۱ تقسیم می‌کنیم. باقی‌مانده‌ها به ترتیب 1, 2, 2, 4, 5 است (مثلاً $137 = 7\times19 + 4$ و $137 = 11\times12 + 5$). چون هیچ‌کدام صفر نیست، ۱۳۷ اول است.

۸۸ صفحه ۲۸ تمرین ترکیبی

۴ــ دو عدد مرکب بنویسید که نسبت به هم اول باشند.

مثلاً 8 و 9؛ هر دو مرکب‌اند $(8 = 2\times4، 9 = 3\times3)$ و $(8,9) = 1$. نمونه‌ی دیگر: $(15,16) = 1$.

گام به گام ریاضی هشتم - فصل سوم

چندضلعی‌ها

فهرست

۸۹ صفحه ۳۰ · فعالیت — چندضلعی چیست؟ ۴۷

۹۰ صفحه ۳۰ · فعالیت — چندضلعی منتظم ۴۷

۹۱ صفحه ۳۰ · کار در کلاس — توصیف چندضلعی‌ها ۴۷

۹۲ صفحه ۳۱ · کار در کلاس — رسم چندضلعی‌ها روی صفحه‌ی شطرنجی ۴۸

۹۳ صفحه ۳۱ · کار در کلاس — خط‌های تقارن چندضلعی‌های منتظم ۴۸

۹۴ صفحه ۳۱ · فعالیت — دوران ۱۸۰ درجه‌ی مستطیل ۴۹

۹۵ صفحه ۳۲ · فعالیت — مرکز تقارن ۴۹

۹۶ صفحه ۳۳ · کار در کلاس — کامل کردن شکل با مرکز تقارن ۵۰

۹۷ صفحه ۳۳ · تمرین — بررسی مرکز تقارن ۵۰

۹۸ صفحه ۳۴ · فعالیت — زاویه‌ها در خطوط موازی ۵۰

۹۹ صفحه ۳۴ · فعالیت — خط عمود و موازی ۵۱

۱۰۰ صفحه ۳۵ · کار در کلاس — محاسبه‌ی زاویه‌های مجهول ۵۱

۱۰۱ صفحه ۳۵ · فعالیت — رسم خط موازی ۵۲

۱۰۲ صفحه ۳۶ · فعالیت — عمود و موازی با علامت‌گذاری ۵۲

۱۰۳ صفحه ۳۶ · فعالیت — زاویه‌های متوازی‌الاضلاع ۵۳

۱۰۴ صفحه ۳۷ · کار در کلاس — مثلث متساوی‌الساقین و متوازی‌الاضلاع ۵۳

۱۰۵ صفحه ۳۷ · تمرین — پیدا کردن زاویه‌ی مجهول و تشکیل معادله ۵۴

۱۰۶ صفحه ۳۸ · فعالیت — خاصیت‌های متوازی‌الاضلاع ۵۴

۱۰۷ صفحه ۳۹ · کار در کلاس — معادله در متوازی‌الاضلاع ۵۵

۱۰۸ صفحه ۳۹ · فعالیت — مستطیل، لوزی و مربع ۵۵

۱۰۹ صفحه ۴۰ · کار در کلاس — رابطه‌ی چهارضلعی‌ها ۵۶

۱۱۰ صفحه ۴۱ · کار در کلاس — چهارضلعی MNPQ در کاشی‌کاری ۵۷

۱۱۱ صفحه ۴۱ · تمرین — لوزی و مربع ۵۷

۱۱۲ صفحه ۴۱ · تمرین — تا کردن لوزی ۵۷

۱۱۳ صفحه ۴۱ · تمرین — وسط ضلع‌های مستطیل ۵۸

۱۱۴ صفحه ۴۱ · تمرین — درست یا نادرست ۵۸

۱۱۵ صفحه ۴۲ · فعالیت — کاشی‌کاری با یک نوع کاشی ۵۹

۱۱۶ صفحه ۴۲ · کار در کلاس — کاشی‌کاری با یک نوع کاشی ۵۹

۱۱۷ صفحه ۴۳ · فعالیت — مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی ۶۰

۱۱۸ صفحه ۴۴ · کار در کلاس — مجموع و اندازه‌ی زاویه‌ها در منتظم‌ها ۶۱

۱۱۹ صفحه ۴۵ · تمرین — زاویه‌ی بیست‌ضلعی منتظم و کاشی‌کاری‌ها ۶۱

۱۲۰ صفحه ۴۶ · فعالیت — زاویه‌ی خارجی مثلث ۶۲

ایران توشه
وب‌سایتی برای موفقیت

۱۲۱ صفحه ۴۶ · کار در کلاس — زاویه‌های خارجی ۶۲

۱۲۲ صفحه ۴۷ · فعالیت — زاویه‌ی خارجی و دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور ... ۶۳

۱۲۳ صفحه ۴۷ · کار در کلاس — مثال نقض برای زاویه‌ی خارجی چهارضلعی ... ۶۳

۱۲۴ صفحه ۴۸ · کار در کلاس — زاویه‌های مجهول ۶۴

۱۲۵ صفحه ۴۸ · فعالیت — مجموع زاویه‌های خارجی ۶۴

۱۲۶ صفحه ۴۹ · کار در کلاس — زاویه‌های خارجی چندضلعی‌ها ... ۶۴

۱۲۷ صفحه ۴۹ · تمرین — زاویه‌های خارجی متوازی‌الاضلاع و کاشی‌کاری ... ۶۵

۱۲۸ صفحه ۴۹ · تمرین — لاک‌پشت و زاویه‌ی خارجی ۶۵

۱۲۹ صفحه ۵۰ · تمرین ترکیبی — جدول خاصیت چهارضلعی‌ها و هشت‌ضلعی منتظم ... ۶۶

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۸۹ صفحه ۳۰ فعالیت

۱ــ در صفحه به هر خطِ شکسته‌ی بسته، چندضلعی گفته می‌شود به شرط اینکه ضلع‌ها یکدیگر را قطع نکنند؛ مگر در رأس‌ها که دو ضلع به هم می‌رسند. شکل «ج» چندضلعی نیست؛ چون ضلع‌های آن یکدیگر را قطع کرده‌اند. شکل «و» چندضلعی نیست؛ چرا؟ شکل «الف» هم چندضلعی نیست؛ چرا؟

شکلی که یکی از شرط‌های تعریف را نداشته باشد چندضلعی نیست. شکل «و» و شکل «الف» هر کدام به یکی از این دو دلیل چندضلعی نیستند: **بسته نیستند** (خط شکسته‌ی آنها یک سر باز دارد و به نقطه‌ی شروع برنمی‌گردد) یا **ضلع‌هایشان در جایی غیر از رأس‌ها یکدیگر را قطع کرده‌اند**.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۰ صفحه ۳۰ فعالیت

۲ــ اگر در یک چندضلعی همه‌ی ضلع‌ها با هم و همه‌ی زاویه‌ها با هم مساوی باشند، می‌گوییم آن چندضلعی منتظم است. از میان شکل‌های بالا، کدام شکل‌ها چندضلعی منتظم‌اند؟

۳ــ یکی از شکل‌های بالا را انتخاب کنید؛ سپس درباره‌ی تعداد ضلع‌ها، زاویه‌ها، تساوی آنها و ... توضیح دهید تا دوستتان شکلی را پیدا کند که انتخاب کرده‌اید.

چندضلعی منتظم باید هم‌زمان «همه‌ی ضلع‌ها مساوی» و «همه‌ی زاویه‌ها مساوی» باشد؛ مثل مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع، پنج‌ضلعی منتظم و شش‌ضلعی منتظم. لوزی (با زاویه‌های نابرابر) و مستطیل (با ضلع‌های نابرابر) منتظم نیستند، چون فقط یکی از دو شرط را دارند. در بین شکل‌های «الف» تا «ز» شکل‌هایی که ضلع‌ها و زاویه‌های برابر دارند منتظم‌اند.

نمونه‌ی توصیف (سؤال ۳): «شکل من ۴ ضلع دارد، هر چهار ضلع آن با هم برابرند و هر چهار زاویه‌اش قائمه است» (مربع).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۱ صفحه ۳۰ کار در کلاس

۱ــ هر یک از عبارت‌های زیر به کدام چندضلعی‌ها مربوط است؟ (پنج‌ضلعی غیرمنتظم؛ لوزی با زاویه‌ی قائمه؛ خط شکسته‌ی باز؛ چندضلعی منتظم؛ مثلث با زاویه‌ی قائمه؛ ...)

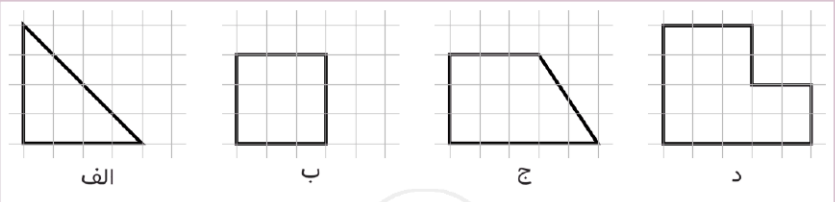
برای هر عبارت، شکلی را انتخاب کنید که آن ویژگی را دارد: «لوزی با زاویه‌ی قائمه» همان مربع است؛ «مثلث با زاویه‌ی قائمه» مثلث قائم‌الزاویه است؛ «پنج‌ضلعی غیرمنتظم» پنج ضلعی است که ضلع‌ها یا زاویه‌هایش مساوی نیستند؛ «خط شکسته‌ی باز» شکلی است که چندضلعی نیست چون بسته نیست.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۲ صفحه ۳۱ کار در کلاس

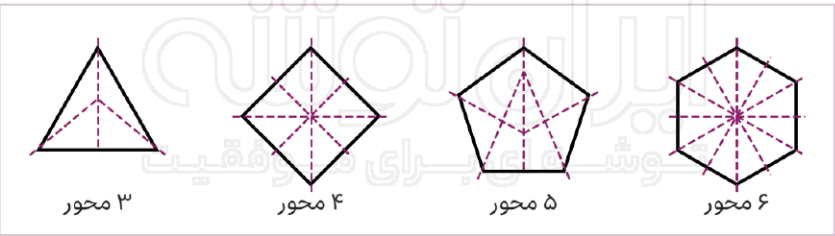
۲ــ چندضلعی‌های زیر را در صفحه‌ی شطرنجی رسم کنید: الف) یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین؛ ب) مستطیلی با ضلع‌های مساوی؛ ج) یک ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه؛ د) یک شش‌ضلعی با دقیقاً سه زاویه‌ی قائمه.



- الف) مثلثی با دو ضلع هم‌اندازه‌ی عمود بر هم (مثلاً ۴ و ۴ خانه).
- ب) مستطیلی با ضلع‌های مساوی همان مربع است (مثلاً ۳ در ۳ خانه).
- ج) ذوزنقه‌ای که یک ساق آن بر دو قاعده عمود است.
- د) شش‌ضلعی «L» شکل که سه زاویه‌ی قائمه دارد.

۹۳ صفحه ۳۱ کار در کلاس

۳ــ در سال گذشته با خط تقارن شکل آشنا شدید. الف) تعداد خط‌های تقارن هریک از چندضلعی‌های منتظم زیر را پیدا کنید. ب) به نظر شما nضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ ده‌ضلعی منتظم چطور؟



چندضلعی منتظم	تعداد ضلع	تعداد خط تقارن
مثلث	3	3
مربع	4	4
پنج‌ضلعی	5	5
شش‌ضلعی	6	6

هر nضلعی منتظم دقیقاً n خط تقارن دارد؛ پس ده‌ضلعی منتظم 10 خط تقارن دارد.

۹۴ صفحه ۳۱ فعالیت

۱ــ یک ورق کاغذ پوستی روی مستطیل بگذارید و تصویر مستطیل را روی آن رسم کنید. نوک مدادتان را روی مرکز دوران بگذارید و کاغذ پوستی را ۱۸۰ درجه حول مرکز دوران بچرخانید. آیا تصویر روی شکل منطبق می‌شود؟

بله؛ وقتی مستطیل را ۱۸۰ درجه حول نقطه‌ی برخورد قطرهایش می‌چرخانیم، تصویر کاملاً روی خود مستطیل می‌افتد. با دوران‌های ۴۵، ۹۰ و ۱۳۵ درجه تصویر روی شکل منطبق نمی‌شود.

۹۵ صفحه ۳۲ فعالیت

۲ــ شکل روبه‌رو مثلثی متساوی‌الاضلاع است. یک ورق کاغذ پوستی روی آن قرار دهید و مراحل فعالیت (۱) را تکرار کنید. آیا تصویر روی شکل منطبق می‌شود؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳ــ در کدام یک از چندضلعی‌های منتظم زیر، نقطه‌ی مشخص‌شده مرکز تقارن است؟ به نظر شما nضلعی منتظم مرکز تقارن دارد؟ ده‌ضلعی منتظم چطور؟ از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴ــ یکی از راه‌های تشخیص اینکه نقطه‌ی O در مثلث متساوی‌الاضلاع مرکز تقارن نیست، این است که می‌توان روی شکل، نقطه‌ای پیدا کرد که قرینه‌ی آن نسبت به نقطه‌ی O روی خود شکل قرار نگرفته باشد. مانند نمونه، نشان دهید که نقطه‌ی O در دو شکل دیگر هم مرکز تقارن نیست.

۵ــ کدام یک از شکل‌های فعالیت (۳) با ۹۰° دوران حول نقطه‌ی مشخص‌شده در جهت عقربه‌های ساعت روی خودش می‌افتد؟

۲

خیر؛ مثلث متساوی‌الاضلاع بعد از ۱۸۰ درجه چرخش روی خودش نمی‌افتد (رأس آن به وسط ضلع مقابل نمی‌رسد). پس این مثلث مرکز تقارن ندارد.

۳

چندضلعی‌های منتظمی که تعداد ضلع‌هایشان زوج است (مربع، شش‌ضلعی، هشت‌ضلعی، ده‌ضلعی، ...) مرکز تقارن دارند؛ چون ۱۸۰ درجه چرخش آنها را روی خودشان می‌اندازد. چندضلعی‌های منتظم با تعداد ضلع فرد (مثلث، پنج‌ضلعی، هفت‌ضلعی) مرکز تقارن ندارند. پس ده‌ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد.

۴

یک رأس شکل را در نظر می‌گیریم و قرینه‌ی آن را نسبت به O (با ۱۸۰ درجه چرخش) پیدا می‌کنیم؛ این نقطه بیرون از شکل می‌افتد، پس O مرکز تقارن نیست.

۵

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

شکلی که با ۹۰ درجه چرخش بر خودش منطبق می‌شود مربع است (زاویه‌ی دوران ۳۶۰ تقسیم بر ۴).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۶ صفحه ۳۳ کار در کلاس

مانند نمونه هر شکل را طوری کامل کنید که نقطه‌ی O مرکز تقارن باشد.

برای هر نقطه‌ی شکل، قرینه‌ی آن نسبت به O را پیدا می‌کنیم؛ یعنی از نقطه به O وصل می‌کنیم و به همان اندازه در سمت دیگر ادامه می‌دهیم. با وصل‌کردن نقطه‌های قرینه، شکل کامل می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۷ صفحه ۳۳ تمرین

در هر شکل، بررسی کنید که نقطه‌ی مشخص‌شده، مرکز تقارن شکل هست یا نه.

اگر نقطه را مرکز دوران ۱۸۰ درجه بگیریم و شکل بر خودش منطبق شود، نقطه مرکز تقارن است. در متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مربع و شش‌ضلعی منتظم محل برخورد قطرها مرکز تقارن است ولی در مثلث، ذوزنقه و پنج‌ضلعی منتظم مرکز تقارن وجود ندارد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۸ صفحه ۳۴ فعالیت

۱ــ اگر خطی مانند d1، خطوط a و b را مانند شکل با زاویه‌های مساوی قطع کرده باشد، خطوط a و b با هم موازی‌اند. به خط d1 خط مورب می‌گویند. اگر $A1 = 60^\circ$ باشد، زاویه‌های خواسته‌شده (A2, A3, B1, B2, B3) را پیدا کنید و راه‌حل خود را توضیح دهید.

- $A2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (مکمل A1)
- $A3 = 60^\circ$ (رأسی با A1)
- $B1 = 60^\circ$ (چون a ∥ b، زاویه‌های متناظر مساوی‌اند)
- $B2 = 120^\circ$ (مکمل B1)
- $B3 = 60^\circ$ (رأسی با B1)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۹۹ صفحه ۳۴ **فعالیت**

۲ــ خط d2 را بر a عمود کنید و ادامه دهید تا خط b را قطع کند. چرا d2 بر b هم عمود است؟

۳ــ خط d3 با خط b زاویه‌ی 70° ساخته است. خط d3 با خط a چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۴ــ دو خط a و b با هم موازی‌اند و خط d1 مورب است؛ پس زاویه‌های A1 و B1 با هم مساوی‌اند. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم: (a ∥ b و d1 مورب) ⇒ A1 = B1.

۲) چون a ∥ b و d2 با a زاویه‌ی 90° ساخته است، زاویه‌ی متناظر آن با b هم 90° است؛ پس d2 ⊥ b.

۳) چون a ∥ b، زاویه‌ی متناظر مساوی است؛ پس d3 با a هم زاویه‌ی 70° می‌سازد.

۴) دلیل مساوی‌بودن A1 و B1: اگر خط a را روی خط b انتقال دهیم (نقطه‌ی A روی B بیفتد)، زاویه‌ی A1 دقیقاً روی B1 می‌افتد؛ پس با هم مساوی‌اند. A1 مکمل A2، و A1 = B1 پس B1 هم مکمل A2 است؛ همچنین A1 مکمل زاویه‌ی کناری خود و B1 رأسی با آن است.

۱۰۰ صفحه ۳۵ **کار در کلاس**

۱ــ در هر شکل یک خط مورب، دو خط موازی را قطع کرده است. اندازه‌ی زاویه‌های مجهول را به دست آورید. (زاویه‌های داده‌شده: 36°، 135°، 65°، 60° برای مجهول‌های x, y, z, t)

۲ــ الف) عبارت‌های a ∥ b و c ⊥ a را بخوانید. ب) زاویه‌های مساوی را در شکل‌ها با علامت‌گذاری مشخص کنید.

هر زاویه‌ی مجهول یا با زاویه‌ی داده‌شده متناظر / رأسی / مکمل است. اگر زاویه‌ی داده‌شده 135° باشد، زاویه‌ی کناری آن $45^\circ = 135^\circ - 180^\circ$ و زاویه‌ی متناظر آن 135° است؛ اگر 65° باشد، مکمل آن 115° است.

۲ الف) «خط a با خط b موازی است» و «خط a بر خط c عمود است».

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۰۱ صفحه ۳۵ فعالیت

۱ــ می‌خواهیم در صفحه‌ی شطرنجی خطی موازی خط d رسم کنیم. راه‌حل سه دانش‌آموز را مشاهده کنید و توضیح دهید هرکدام از آنها چگونه خط موازی را رسم کرده است. چرا A1 و B2 مکملاند؟ اگر خط a را روی صفحه انتقال دهیم تا روی خط b قرار گیرد و نقطه‌ی A روی B بیفتد، زاویه‌ی A1 روی کدام زاویه قرار می‌گیرد؟ چگونه از این طریق می‌توان توجیه کرد که زاویه‌ی A1 و زاویه‌ی B2 مکمل یکدیگرند؟

هر سه دانش‌آموز از ویژگی «خطی که با یک مورب زاویه‌های مساوی بسازد، موازی است» یا از انتقال استفاده کرده‌اند: یکی در شبکه، به اندازه‌ی یک بردار ثابت (مثلاً ۲ خانه به راست و ۱ خانه بالا) خط را جابه‌جا کرده؛ دیگری با خط‌کش و گونیا زاویه‌ی مساوی ساخته؛ و سومی دو نقطه را که از d فاصله‌ی برابر دارند به هم وصل کرده است.

با انتقال خط a روی b، زاویه‌ی A1 بر B1 منطبق می‌شود؛ پس A1 = B1. چون B1 و B2 روی خط راست مجاورند و B1+B2 = 180°، پس A1+B2 = 180°؛ یعنی A1 و B2 مکمل‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۲ صفحه ۳۶ فعالیت

۲ــ عمودبودن دو خط را با علامت‌گذاری آنها مشخص می‌کنیم و عبارت «خط l1 بر خط l2 عمود است» را به صورت l2 ⊥ l1 می‌نویسیم. مانند نمونه برای هر کدام شکل بکشید و جاهای خالی را پر کنید.

الف) a ⊥ b و c ∥ b ⇒ a ⊥ c. ب) g ∥ h و k ⊥ h ⇒ ؟ اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود ..... ج) d ∥ e و f ∥ d ⇒ ؟ دو خط موازی با یک خط ..... ؛ دو خط عمود بر یک خط .....

- ب) g ∥ h و k ⊥ h ⇒ k ⊥ g. اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود شود، بر خط دیگر هم عمود است.
- ج) d ∥ f و e ∥ f ⇒ d ∥ e. دو خط موازی با یک خط، با هم موازی‌اند.
- دو خط عمود بر یک خط، با هم موازی‌اند.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۰۳ صفحه ۳۶ فعالیت

۳ــ در هر متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو با هم موازی‌اند. چهارضلعی ABCD یک متوازی‌الاضلاع است. الف) ضلع‌های موازی را با علامت‌گذاری مشخص کنید. ب) جاهای خالی را در رابطه‌های زیر کامل کنید: (DC ∥ AB و مورب AD) ⇒ ? = A1 ، (DC ∥ AB و مورب BC) ⇒ ، (DC و مورب AD ∥ BC) ⇒ ، (AB و مورب AD ∥ BC) ⇒

الف) DC ∥ AB و BC ∥ AD. ب) هر دو زاویه‌ی داخلیِ یک سمت مورب (زاویه‌های هم‌طرف) مکمل هم‌اند و زاویه‌های متبادل مساوی‌اند:

- (DC ∥ AB و مورب AD) ⇒ $\angle A + \angle D = 180^\circ$
- (DC ∥ AB و مورب BC) ⇒ $\angle B + \angle C = 180^\circ$
- (DC ∥ AD و مورب DC) ⇒ $\angle D + \angle C = 180^\circ$
- (BC ∥ AD و مورب AB) ⇒ $\angle A + \angle B = 180^\circ$

نتیجه: زاویه‌های مجاور متوازی‌الاضلاع مکمل‌اند و زاویه‌های روبه‌رو مساوی‌اند ($\angle A = \angle C$ و $\angle B = \angle D$).

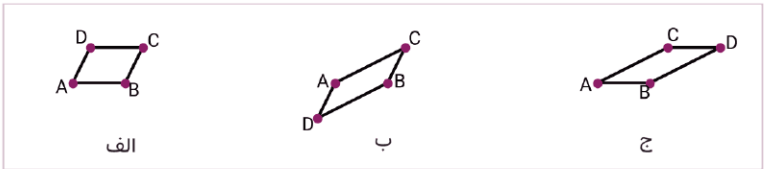
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۴ صفحه ۳۷ کار در کلاس

۱ــ الف) یک مثلث متساوی‌الساقین بکشید؛ طوری که پاره‌خط AB قاعده‌ی آن باشد. ب) خط تقارن مثلث را رسم کنید. ج) آیا دو زاویه‌ی مجاور قاعده با هم برابرند؟ د) آیا خط تقارن، عمودمنصف قاعده و نیم‌ساز زاویه‌ی مقابل آن است؟

۲ــ متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که نقاط A، B و C سه تا از رأس‌های آن باشند. برای این سؤال چند پاسخ مختلف می‌توانید پیدا کنید؟

۱) مثلث ABC را با CA = CB رسم می‌کنیم؛ خط تقارن از رأس C به وسط قاعده می‌رود. ج) بله، با تا کردن روی خط تقارن، دو زاویه‌ی مجاور قاعده روی هم می‌افتند و مساوی‌اند. د) بله؛ خط تقارن هم از وسط AB می‌گذرد و بر آن عمود است (عمودمنصف) و هم زاویه‌ی C را نصف می‌کند (نیم‌ساز).



۲) سه پاسخ مختلف وجود دارد؛ رأس چهارم بسته به این‌که کدام نقطه رأس مقابل رأس چهارم باشد، D = A+B−C ،A+C−B یا D = B+C−A است.

irantooshe.ir

۱۰۵ صفحه ۳۷ تمرین

۱ــ در هر قسمت، اندازه‌ی زاویه‌ی مجهول را پیدا کنید.

۲ــ مانند نمونه با تشکیل معادله، مقدار x را پیدا کنید. (نمونه: $2x+30^\circ+130^\circ=180^\circ \Rightarrow 2x=20^\circ \Rightarrow x=10^\circ$)

۱) در مثلث مجموع زاویه‌ها 180° است؛ زاویه‌های مکمل جمعشان 180° و زاویه‌های رأسی مساوی‌اند. با این سه قاعده هر زاویه‌ی مجهول پیدا می‌شود؛ مثلاً اگر دو زاویه‌ی 55° و 55° در مثلثی داده شده باشد، زاویه‌ی سوم $180^\circ-110^\circ=70^\circ$ است.

۲) برای هر شکل جمع زاویه‌ها را برابر 180° (در مثلث یا روی خط راست) قرار می‌دهیم: مثلاً $(2x-25^\circ)+155^\circ=180^\circ \Rightarrow 2x=50^\circ \Rightarrow x=25^\circ$؛ و $(x+40^\circ)+60^\circ+\ldots=180^\circ$ به همین ترتیب حل می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۶ صفحه ۳۸ فعالیت

۱ــ متوازی‌الاضلاعی را رسم، و مانند شکل نام‌گذاری کنید. روی آن کاغذ پوستی بگذارید و تصویر متوازی‌الاضلاع را رسم کنید. نوک مدادتان را روی نقطه‌ی O (محل برخورد قطرها و مرکز تقارن شکل) قرار دهید و تصویر را ۱۸۰ درجه حول این نقطه بچرخانید تا بر شکل منطبق شود.

۲ــ با توجه به انطباق شکل و تصویر، تساوی‌ها را کامل کنید: ؟ = ∠A، ؟ = ∠B، ؟ = AB، ؟ = BC. در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو ...؛ ضلع‌های روبه‌رو ...؛ زاویه‌های مجاور ...

۳ــ پاره‌خط OA بر کدام پاره‌خط منطبق شده است؟ پاره‌خط OB چطور؟ با توجه به پاسخ این دو پرسش، یک خاصیت دیگر متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید و بنویسید.

- $\angle A=\angle C$ و $\angle B=\angle D$؛ $AB=CD$ و $BC=AD$
- در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو مساوی‌اند.
- در هر متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند.
- در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های مجاور مکمل‌اند (مجموعشان 180° است).

پاره‌خط OA بر OC و OB بر OD منطبق می‌شود. پس در هر متوازی‌الاضلاع، **قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند**.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۰۷ صفحه ۳۹ کار در کلاس

۱ــ شکل‌های زیر متوازی‌الاضلاع‌اند. با تشکیل معادله، مقدار x را به دست آورید. (ضلع‌ها: 2x−3 و 7؛ 3x−1 و 17؛ زاویه‌ها: $x+10^\circ$ و 140°؛ $2x+10$ و 130°)

۲ــ در صفحه‌ی شطرنجی متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که یکی از زاویه‌هایش قائمه (90°) باشد. چرا زاویه‌های دیگر آن هم حتماً قائمه‌اند؟ توضیح دهید.

- ضلع‌های روبه‌رو مساوی‌اند: $2x-3=7 \Rightarrow 2x=10 \Rightarrow x=5$
- $3x-1=17 \Rightarrow 3x=18 \Rightarrow x=6$
- زاویه‌های مجاور مکمل‌اند: $x+10^\circ+140^\circ=180^\circ \Rightarrow x=30^\circ$
- زاویه‌های روبه‌رو مساوی‌اند: $2x+10^\circ=130^\circ \Rightarrow 2x=120^\circ \Rightarrow x=60^\circ$

اگر یک زاویه 90° باشد، زاویه‌ی روبه‌رو هم 90° است و هر زاویه‌ی مجاور با آن مکمل است: $90^\circ-90^\circ=180^\circ$. پس هر چهار زاویه قائمه‌اند (شکل مستطیل است).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۰۸ صفحه ۳۹ فعالیت

۱ــ با توجه به تعریف متوازی‌الاضلاع، کدام یک از شکل‌های زیر متوازی‌الاضلاع است؟

۲ــ در اینجا چند چهارضلعی دیگر هم تعریف شده است. هر تعریف را بخوانید و از میان چهارضلعی‌های فعالیت قبل، مثال‌هایی برای هریک پیدا کنید. مستطیل متوازی‌الاضلاعی است که زاویه‌های قائمه دارد. لوزی متوازی‌الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابرند. مربع متوازی‌الاضلاعی است که چهار ضلع مساوی و زاویه‌های قائمه دارد.

۳ــ می‌دانیم که «در هر متوازی‌الاضلاع، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.» آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم که «در هر لوزی هم قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند»؟ چرا؟

۱) چهارضلعی‌ای متوازی‌الاضلاع است که ضلع‌های روبه‌رویش دوبه‌دو موازی باشند؛ مستطیل، لوزی و مربع نیز همین شرط را دارند و متوازی‌الاضلاع‌اند ولی ذوزنقه‌ی معمولی و چهارضلعی دلخواه نیستند.

۲) مستطیل: شکلی با ۴ زاویه‌ی قائمه؛ لوزی: چهار ضلع مساوی؛ مربع: هم زاویه‌های قائمه و هم ضلع‌های مساوی.

۳) بله. هر لوزی متوازی‌الاضلاع است (ضلع‌های روبه‌رویش موازی‌اند) و هر خاصیتی که برای همه‌ی متوازی‌الاضلاع‌ها درست باشد برای لوزی هم درست است؛ پس قطرهای لوزی یکدیگر را نصف می‌کنند.

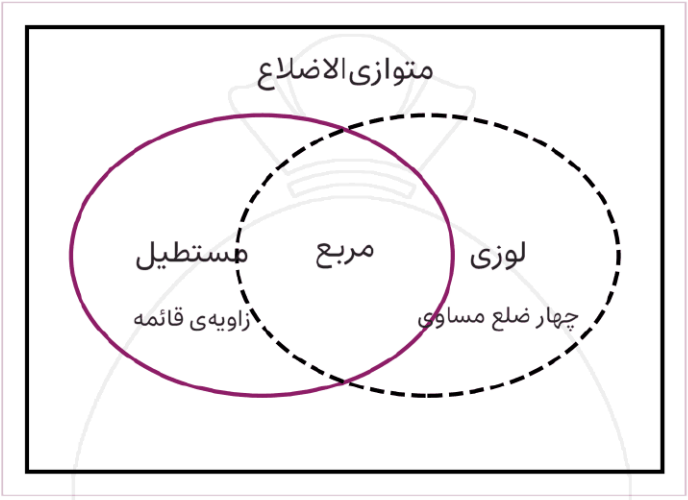
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۰۹ صفحه ۴۰ کار در کلاس

۱ــ با توجه به نمودار روبه‌رو در جدول زیر، جاهای خالی را پر کنید (متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مربع).

۲ــ روی یک ورق کاغذ، مستطیلی به دلخواه رسم کنید و دور آن را ببرید. مستطیل را مانند شکل نام‌گذاری کنید؛ سپس آن را ابتدا روی یکی از خط‌های تقارن و سپس روی خط تقارن دیگر تا کنید. مانند نمونه، توضیح دهید که شکل به‌دست‌آمده چگونه هر یک از خاصیت‌های مستطیل را نشان می‌دهد. (نمونه: در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند؛ چون OA روی OC و OB روی OD قرار گرفته است.) الف) همه‌ی زاویه‌ها در مستطیل با هم برابرند؛ چون ... ب) ضلع‌های روبه‌رو در مستطیل مساوی‌اند؛ چون ... ج) قطرها در مستطیل با هم برابرند؛ چون ...



هر مربع هم مستطیل است و هم لوزی، و هر مستطیل و هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.

- الف) با تا کردن روی خط تقارن، هر زاویه‌ی مستطیل بر زاویه‌ی دیگری از آن منطبق می‌شود؛ پس همه‌ی زاویه‌ها مساوی (هر کدام 90°) هستند.
- ب) در تا کردن روی خط تقارن (عمودمنصف ضلع)، ضلع‌های روبه‌رو روی هم می‌افتند؛ پس مساوی‌اند.
- ج) با تا کردن روی خط تقارن، قطر AC بر قطر BD منطبق می‌شود؛ پس قطرها برابرند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۰ صفحه ۴۱ کار در کلاس

۳ــ در یک طرح کاشی‌کاری، مربع ABCD دیده می‌شود. چهارضلعی MNPQ هم با وصل‌شدن وسط ضلع‌های این مربع تشکیل شده است. دو دانش‌آموز توضیح داده‌اند که MNPQ چه نوع چهارضلعی‌ای است: مبین می‌گوید چون با تا کردن مربع روی دو خط تقارنی موازی ضلع‌ها، همه‌ی ضلع‌های MNPQ روی هم می‌افتند، پس لوزی است. هادی می‌گوید چون با تا کردن روی دو قطر، همه‌ی زاویه‌های MNPQ روی هم می‌افتند و مجموعشان 360° است، پس هر کدام 90° است و مستطیل است. دلایل هر دو را بخوانید و توضیح دهید که چگونه به کمک این دو نوشته می‌توانیم نتیجه بگیریم که MNPQ مربع است.

طبق نوشته‌ی مبین چهارضلعی MNPQ چهار ضلع مساوی دارد (لوزی است) و طبق نوشته‌ی هادی چهار زاویه‌ی قائمه دارد (مستطیل است). چهارضلعی‌ای که هم چهار ضلع مساوی و هم چهار زاویه‌ی قائمه داشته باشد، طبق تعریف مربع است؛ پس MNPQ مربع است.

۱۱۱ صفحه ۴۱ تمرین

۱ــ چهارضلعی ABCD لوزی و چهارضلعی DCEF مربع است. الف) چرا CE = AD؟ ب) چرا EF ∥ AB؟ ج) زاویه‌ی ADF چند درجه است؟ (زاویه‌ی 40° در شکل داده شده است.)

- الف) CE = DC (ضلع‌های مربع) و DC = AD (ضلع‌های لوزی)؛ پس CE = AD.
- ب) EF ∥ DC (ضلع‌های روبه‌روی مربع) و DC ∥ AB (ضلع‌های روبه‌روی لوزی)؛ پس EF ∥ AB.
- ج) اگر زاویه‌ی 40° مربوط به زاویه‌ی لوزی در A باشد، $\angle ADC = 140^\circ$ و $\angle ADF = 360^\circ - 140^\circ - 90^\circ = 130^\circ$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۲ صفحه ۴۱ تمرین

۲ــ روی کاغذ، لوزی دلخواهی بکشید و دور آن را ببرید. این لوزی کاغذی را روی دو خط تقارنش تا کنید. به کمک شکل به‌دست‌آمده چه نتایجی در مورد قطرهای لوزی به‌دست می‌آید؟

خط‌های تقارن لوزی همان قطرهای آن هستند. با تا کردن روی هر قطر، نیمه‌ی دیگر روی نیمه‌ی اول می‌افتد؛ پس: ۱) قطرهای لوزی یکدیگر را نصف می‌کنند؛ ۲) قطرها بر هم عمودند؛ ۳) هر قطر زاویه‌های دو سر خود را نصف می‌کند (نیم‌ساز است).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱۳ صفحه ۴۱ تمرین

۳ــ وسط ضلع‌های یک مستطیل را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی به‌دست‌آمده چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ دلیل خود را توضیح دهید.

لوزی است. چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی گوشه‌های مستطیل هم‌نهشت‌اند (دو ضلع قائمه‌ی هر کدام نصف ضلع‌های مستطیل است)؛ پس وترهای آنها، که ضلع‌های چهارضلعی‌اند، با هم مساوی‌اند و چهارضلعی لوزی است. (می‌توان با تا کردن روی دو خط تقارن مستطیل هم نتیجه گرفت.)

۱۱۴ صفحه ۴۱ تمرین

۴ــ درستی یا نادرستی هریک از جمله‌های زیر را بررسی کنید. الف) قطرهای هر مستطیل با هم مساوی‌اند. ب) قطرهای هر لوزی با هم مساوی‌اند. ج) قطرهای هر مستطیل بر هم عمودند. د) قطرهای هر لوزی بر هم عمودند.

جمله	درست/نادرست	دلیل
الف	درست	قطرهای مستطیل با هم برابرند.
ب	نادرست	قطرهای لوزی (غیرمربع) برابر نیستند.
ج	نادرست	قطرهای مستطیل (غیرمربع) بر هم عمود نیستند.
د	درست	قطرهای لوزی بر هم عمودند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱۵ صفحه ۴۲ فعالیت

۱ــ در کاشی‌کاری، کاشی‌ها را طوری کنار هم قرار می‌دهند که روی هم نیفتند و جای خالی هم بین آنها نباشد. در اینجا چند نمونه کاشی‌کاری را مشاهده می‌کنید که هر کدام تنها با یک نوع کاشی انجام شده است. حالا به شکل‌های زیر توجه کنید. در هر مورد توضیح دهید، چرا کاشی‌کاری با یک نوع کاشی انجام نمی‌شود؟

۲ــ سطح زیر با مثلث‌هایی هم‌نهشت با مثلث ABC کاشی‌کاری شده است. مثلث آبی انتقال‌یافته‌ی مثلث ABC است، مثلث زرد دوران‌یافته‌ی مثلث ABC است. زاویه‌های متناظر با هریک از زاویه‌های مثلث ABC را در این دو مثلث مشخص کنید. در کاشی‌کاری بالا، قسمتی را که نشان می‌دهد $A+B+C = 180^\circ$ پیدا کنید.

۱) برای کاشی‌کاری با یک نوع کاشی، اطراف هر نقطه مجموع زاویه‌های کاشی‌ها باید دقیقاً 360° شود. در شکل‌هایی که کاشی‌کاری نشده، مجموع زاویه‌ها یا کمتر از 360° است (جای خالی می‌ماند) یا بیشتر (کاشی‌ها روی هم می‌افتند)؛ مثلاً زاویه‌ی هر پنج‌ضلعی منتظم 108° است؛ $3\times108^\circ = 324^\circ<360^\circ$ و $4\times108^\circ = 432^\circ>360^\circ$.

۲) در مثلث انتقال‌یافته هر زاویه متناظرش با همان نام‌گذاری و موقعیت موازی است (A به A' و ...) و در مثلث دوران‌یافته هر زاویه با زاویه‌ی هم‌اندازه‌اش به‌جای دیگری (دورانی) متناظر است. در محلی که سه زاویه‌ی A، B، C کنار هم و روی یک خط راست قرار می‌گیرند، $A+B+C = 180^\circ$ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۱۶ صفحه ۴۲ کار در کلاس

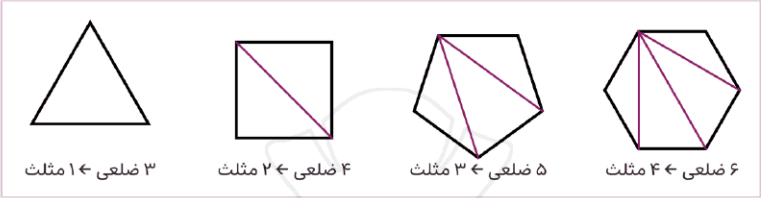
در کدام شکل، کاشی‌کاری با یک نوع کاشی انجام نشده است؟ (شکل‌های الف، ب، ج، د)

در شکلی که زاویه‌های اطراف یک نقطه جمعشان 360° نشود (جای خالی یا هم‌پوشانی داشته باشد)، کاشی‌کاری با یک نوع کاشی انجام نشده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

الف) با کامل‌کردن جدول، مجموع زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های دیگر را به دست آورید. ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های داخلی یک هفت‌ضلعی چند درجه است؟ یک هشت‌ضلعی چطور؟ چرا؟ ج) عبارت جبری زیر را طوری کامل کنید که نشان‌دهنده‌ی مجموع زاویه‌های داخلی یک nضلعی باشد: مجموع زاویه‌های داخلی یک nضلعی = (...−...) × 180°. اکنون با کامل‌کردن جدول زیر اندازه‌ی هر یک از زاویه‌های داخلی چندضلعی‌های منتظم را پیدا کنید. یک عبارت جبری بنویسید که نشان‌دهنده‌ی اندازه‌ی هر یک از زاویه‌های یک nضلعی منتظم باشد.



تعداد ضلع	تعداد مثلث	مجموع زاویه‌های داخلی
3	1	$180^\circ = 180^\circ \times 1$
4	2	$360^\circ = 180^\circ \times 2$
5	3	$540^\circ = 180^\circ \times 3$
6	4	$720^\circ = 180^\circ \times 4$
7	5	$900^\circ = 180^\circ \times 5$
8	6	$1080^\circ = 180^\circ \times 6$

هر چندضلعی را با قطرهایی که از یک رأس می‌گذرند به n−2 مثلث تقسیم می‌کنیم؛ پس مجموع زاویه‌های داخلی $180^\circ \times (n-2)$ است. هفت‌ضلعی 900° و هشت‌ضلعی 1080° دارد.

اندازه‌ی هر زاویه‌ی چندضلعی منتظم

تعداد ضلع	مجموع زاویه‌ها	اندازه‌ی هر زاویه
3	180°	$60^\circ = 3 \div 180^\circ$
4	360°	$90^\circ = 4 \div 360^\circ$
5	540°	$108^\circ = 5 \div 540^\circ$
6	720°	$120^\circ = 6 \div 720^\circ$
n	$180^\circ \times (n-2)$	$n \div (180^\circ \times (n-2))$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۱۸ صفحه ۴۴ کار در کلاس

۱ــ مجموع زاویه‌های هریک از چندضلعی‌های زیر را محاسبه کنید. الف) هفت‌ضلعی منتظم ب) دوازده‌ضلعی منتظم

۲ــ به کمک جواب قسمت (ب) سؤال قبل، اندازه‌ی هر یک از زاویه‌های دوازده‌ضلعی منتظم را حساب کنید.

۳ــ سطح روبه‌رو با دو نوع کاشی منتظم، کاشی‌کاری شده است. اندازه‌ی زاویه‌های هر دو نوع کاشی را محاسبه کنید.

۴ــ کاشی‌هایی به شکل چندضلعی‌های منتظم داریم و می‌خواهیم سطحی را فقط با یک نوع از آنها کاشی‌کاری کنیم. شکل‌های زیر نشان می‌دهند که با سه‌ضلعی و چهارضلعی منتظم می‌توان کاشی‌کاری کرد. یک نوع کاشی منتظم دیگر پیدا کنید که با آن بتوان کاشی‌کاری کرد.

- الف) هفت‌ضلعی: $(7-2) \times 180^\circ = 900^\circ$
- ب) دوازده‌ضلعی: $(12-2) \times 180^\circ = 1800^\circ$

۲) هر زاویه‌ی دوازده‌ضلعی منتظم: $1800^\circ \div 12 = 150^\circ$.

۳) دو نوع کاشی منتظم، هشت‌ضلعی و مربع‌اند: زاویه‌ی هشت‌ضلعی منتظم $(6 \times 180^\circ) \div 8 = 135^\circ$ و زاویه‌ی مربع 90° است؛ و در هر نقطه $135^\circ+135^\circ+90^\circ = 360^\circ$ می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۴) شش‌ضلعی منتظم؛ زاویه‌ی هر یک 120° است و $3 \times 120^\circ = 360^\circ$؛ پس سه شش‌ضلعی دور یک نقطه جا می‌گیرند.

۱۱۹ صفحه ۴۵ تمرین

۱ــ اندازه‌ی هر یک از زاویه‌های یک بیست‌ضلعی منتظم را پیدا کنید.

۲ــ در کاشی‌کاری روبه‌رو تنها یک نوع کاشی به کار رفته است. الف) این کاشی چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ ب) اندازه‌ی هریک از زاویه‌های آن چقدر است؟

۳ــ شکل روبه‌رو قسمتی از یک بشقاب قدیمی است. حدس می‌زنید این بشقاب چندضلعی بوده است؟ چرا؟

۴ــ به کاشی‌کاری زیر توجه کنید. این کاشی‌کاری با سه نوع کاشی مختلف انجام شده است. شکل سمت راست، قسمتی از این طرح را به‌صورت بزرگ‌تر نمایش داده است. اندازه‌ی زاویه‌های مشخص‌شده را به دست آورید.

۵ــ مجموع زاویه‌های داخلی هر شکل را به دست آورید و با هم مقایسه کنید. (الف) و (ب)

۱) مجموع زاویه‌ها: $(20-2) \times 180^\circ = 3240^\circ$؛ هر زاویه: $3240^\circ \div 20 = 162^\circ$.

۲، ۳، ۴، ۵) این پرسش‌ها به شکل وابسته‌اند. اصل کار: مجموع زاویه‌های اطراف هر نقطه‌ی کاشی‌کاری 360° است؛ زاویه‌ی هر nضلعی منتظم برابر $(180^\circ \times (n-2)) \div n$ است؛ و مجموع زاویه‌های داخلی هر nضلعی $180^\circ \times (n-2)$ است (بنابراین دو شکل با تعداد ضلع برابر مجموع برابر دارند، هرچند شکل متفاوت باشد).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۰ صفحه ۴۶ **فعالیت**

در شکل سمت چپ، زاویه‌ی خارجی رأس A از مثلث ABC از امتدادیافتن ضلع AB تشکیل شده است. در شکل سمت راست، زاویه‌ی خارجی رأس A از امتدادیافتن ضلع AC تشکیل شده است. چرا این دو زاویه مساوی‌اند؟

این دو زاویه، زاویه‌های **رأسی (متقابل به رأس)** هستند و زاویه‌های رأسی همواره با هم مساوی‌اند؛ هر دو مکمل زاویه‌ی داخلی A هم‌اند: $180^\circ - \angle A$.

۱۲۱ صفحه ۴۶ **کار در کلاس**

۱ــ الف) مانند نمونه در هر یک از مثلث‌های زیر، زاویه‌ی خارجی هر سه رأس را رسم کنید و اندازه‌ی هر کدام را بنویسید. ب) مجموع زاویه‌های خارجی هریک از مثلث‌ها را پیدا کنید. چه رابطه‌ای میان آنها دیده می‌شود؟
۲ــ چندضلعی‌های زیر منتظم‌اند. اندازه‌ی زاویه‌های خواسته‌شده را پیدا کنید.
۳ــ با توجه به شکل، اندازه‌ی زاویه‌ی خواسته‌شده را پیدا کنید.

۱) زاویه‌ی خارجی هر رأس برابر 180° منهای زاویه‌ی داخلی آن رأس است. در هر مثلث مجموع سه زاویه‌ی خارجی $360^\circ = 180^\circ \times 3 - 180^\circ$ می‌شود. مثلاً در مثلثی با زاویه‌های $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$ هر زاویه‌ی خارجی 120° است و مجموع آنها 360°. مجموع زاویه‌های خارجی هر مثلث همواره 360° است.

۲) در چندضلعی منتظم nضلعی، هر زاویه‌ی خارجی $360^\circ \div n$ است؛ برای مثال در مثلث متساوی‌الاضلاع 120°، در مربع 90° و در ششضلعی منتظم 60°.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۲ صفحه ۴۷ فعالیت

هدی برای یافتن زاویه‌ی خارجی یکی از رأس‌های مثلث به ترتیب زیر عمل کرد. راه‌حل او را کامل کنید. او رابطه‌ی جالبی را مشاهده کرد. آیا می‌توانید حدس بزنید چه رابطه‌ای؟ هدی با خودش فکر کرد: «آیا هر زاویه‌ی خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویه‌ی داخلی دیگر آن مثلث است؟» با یک مثال دیگر حدس خود را بررسی کرد. این آزمایش نیز حدس او را تأیید کرد. آیا حدس‌زدن و آزمایش‌کردن کافی است؟ چرا؟ یکی از دوستان هدی راه‌حل او را به صورت کلی و بدون درنظرگرفتن مثال نوشت تا به این ترتیب، درستی حدس او را اثبات کند.

مثال اول (زاویه‌های 30° و 80°): $\angle C1 = 180^\circ - (30^\circ+80^\circ) = 70^\circ$ و زاویه‌ی خارجی $\angle C2 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$؛ که برابر $30^\circ+80^\circ = 110^\circ$ است. مثال دوم (زاویه‌های 70° و 30°): $\angle C1 = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ و $\angle C2 = 30^\circ+70^\circ = 100^\circ = 180^\circ - 80^\circ$.

رابطه: هر زاویه‌ی خارجی مثلث برابر مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاور با آن است.

حدس‌زدن و آزمایش‌کردن برای اثبات کافی نیست؛ چون ممکن است حدس در مثال‌های دیگری که امتحان نکرده‌ایم نادرست باشد. باید برای حالت کلی استدلال کرد.

اثبات کلی: در مثلث ABC: $\angle A + \angle B + \angle C1 = 180^\circ$ پس $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C1$. از طرفی زاویه‌ی خارجی $\angle C2 = 180^\circ - \angle C1$. بنابراین $\angle C2 = \angle A + \angle B$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۳ صفحه ۴۷ کار در کلاس

۱ــ مثالی بیاورید که نشان دهد جمله‌ی زیر، نادرست است: «هر زاویه‌ی خارجی یک چهارضلعی، برابر مجموع سه زاویه‌ی داخلی دیگر آن است.»

مربع را در نظر بگیرید: هر زاویه‌ی خارجی آن 90° است ولی مجموع سه زاویه‌ی داخلی دیگرش $3\times90^\circ = 270^\circ$ است. چون $270^\circ \neq 90^\circ$، جمله نادرست است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۲۴ صفحه ۴۸ **کار در کلاس**

۲ــ اندازه‌ی دو زاویه‌ی یک مثلث را می‌دانیم؛ پس می‌توانیم اندازه‌ی زاویه‌ی سوم آن را پیدا کنیم. (چگونه؟) برای اینکه بتوانیم اندازه‌ی همه‌ی زاویه‌های هر یک از شکل‌های زیر را پیدا کنیم، دست‌کم چندتا از آنها باید معلوم باشند؟ الف) لوزی ب) چهارضلعی با ضلع‌های نامساوی

زاویه‌ی سوم مثلث: 180° منهای مجموع دو زاویه‌ی معلوم.

- الف) لوزی: دست‌کم **یک** زاویه (زاویه‌ی روبه‌رو مساوی و زاویه‌های مجاور مکمل است).
- ب) چهارضلعی با ضلع‌های نامساوی: دست‌کم **سه** زاویه (زاویه‌ی چهارم 360° منهای مجموع سه زاویه‌ی دیگر).

۱۲۵ صفحه ۴۸ **فعالیت**

سطر اول جدول زیر نشان می‌دهد که مجموع زاویه‌های خارجی یک مثلث برابر 360° است. الف) جدول را کامل کنید و مجموع زاویه‌های خارجی شکل‌های بعدی را به دست آورید. ب) فکر می‌کنید مجموع زاویه‌های خارجی یک هفت‌ضلعی چند درجه است؟ یک هشت‌ضلعی چطور؟

تعداد ضلع	مجموع زاویه‌های داخلی	مجموع زاویه‌های داخلی و خارجی	مجموع زاویه‌های خارجی
3	$180^\circ \times 1$	$180^\circ \times 3$	$360^\circ = 180^\circ \times 2$
4	$180^\circ \times 2$	$180^\circ \times 4$	$360^\circ = 180^\circ \times 2$
5	$180^\circ \times 3$	$180^\circ \times 5$	$360^\circ = 180^\circ \times 2$
6	$180^\circ \times 4$	$180^\circ \times 6$	$360^\circ = 180^\circ \times 2$
n	$180^\circ \times (n-2)$	$n \times 180^\circ$	$360^\circ = 180^\circ \times 2$

مجموع زاویه‌های خارجی هر چندضلعی محدب، صرف‌نظر از تعداد ضلع‌ها، همواره 360° است؛ بنابراین برای هفت‌ضلعی و هشت‌ضلعی هم 360° می‌شود.

۱۲۶ صفحه ۴۹ **کار در کلاس**

۱ــ مجموع زاویه‌های خارجی چندضلعی‌های زیر را حساب کنید. الف) هشت‌ضلعی ب) ده‌ضلعی منتظم
۲ــ به کمک پاسخ قسمت (ب) سؤال قبل، الف) اندازه‌ی هر زاویه‌ی خارجی یک ده‌ضلعی منتظم را پیدا کنید. ب) اندازه‌ی هر زاویه‌ی داخلی یک ده‌ضلعی منتظم را پیدا کنید.

- الف) هشت‌ضلعی: 360°

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

- ب) ده‌ضلعی منتظم: 360°
- الف) هر زاویه‌ی خارجی ده‌ضلعی منتظم: $360^\circ \div 10 = 36^\circ$
- ب) هر زاویه‌ی داخلی: $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$ (با فرمول: $(180^\circ \times 8) \div 10 = 144^\circ$)

۱۲۷ صفحه ۴۹ تمرین

۱ــ زاویه‌های خارجی یک متوازی‌الاضلاع در شکل نشان داده شده‌اند. زاویه‌های مساوی را با علامت‌گذاری مشخص کنید.

۲ــ هر یک از طرح‌های زیر با استفاده از سه نوع کاشی منتظم طراحی شده است. با محاسبه‌ی زاویه‌های داخلی هر کاشی منتظم، نشان دهید زاویه‌ی مشخص‌شده در هر شکل 360° است.

۱) در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های داخلی روبه‌رو مساوی‌اند؛ پس زاویه‌های خارجی در رأس‌های روبه‌رو نیز مساوی‌اند (هر زاویه‌ی خارجی مکمل زاویه‌ی داخلی همان رأس است). دو دو زاویه‌ی خارجی مقابل را با یک نوع علامت مشخص می‌کنیم.

۲) زاویه‌ی داخلی کاشی‌های منتظم: مثلث 60°، مربع 90°، شش‌ضلعی 120°، هشت‌ضلعی 135°، دوازده‌ضلعی 150°. مثلاً سه کاشی مربع، شش‌ضلعی و دوازده‌ضلعی: $90^\circ + 120^\circ + 150^\circ = 360^\circ$؛ و مثلث، مربع و دوازده‌ضلعی را نیز می‌توان چنین بررسی کرد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۲۸ صفحه ۴۹ تمرین

۳ــ لاک‌پشتی روی لبه‌ی باغچه‌ای حرکت می‌کند. او در هر گوشه می‌چرخد و روی لبه‌ی بعدی قرار می‌گیرد. الف) این لاک‌پشت در هر گوشه به اندازه‌ی زاویه‌ی داخلی می‌چرخد یا زاویه‌ی خارجی؟ ب) او حرکتش را از نقطه‌ی A شروع کرده است. تا وقتی دوباره به A برگردد، روی هم چند درجه می‌چرخد؟ ج) این لاک‌پشت برای پیمودن محیط هر یک از باغچه‌های منتظم زیر با شروع از نقطه‌ی مشخص‌شده چند درجه می‌چرخد؟ د) در پاسخ قسمت قبل، چه الگویی را مشاهده می‌کنید؟ توضیح دهید.

- الف) به اندازه‌ی **زاویه‌ی خارجی** می‌چرخد.
- ب) تا برگشتن به A یک دور کامل می‌چرخد: 360°.
- ج) برای هر باغچه‌ی منتظم (مثلث، مربع، پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، ...) مجموع چرخش‌ها 360° است؛ مثلاً مثلث: $3 \times 120^\circ = 360^\circ$، مربع: $4 \times 90^\circ = 360^\circ$، شش‌ضلعی: $6 \times 60^\circ = 360^\circ$.
- د) الگو: مجموع چرخش‌ها برای هر چندضلعی محدب همیشه 360° است، چه تعداد ضلع‌ها کم باشد یا زیاد؛ این همان مجموع زاویه‌های خارجی است.

۱۲۹ صفحه ۵۰ تمرین ترکیبی

۱ــ هر خانه‌ی جدول را با علامت ✓ یا ✗ کامل کنید. ستون‌ها: ضلع‌های روبه‌رو برابر، ضلع‌های روبه‌رو موازی، زاویه‌های روبه‌رو برابر، قطرها منصف یکدیگر، قطرها برابر. سطرها: متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی، مربع.

۲ــ اندازه‌ی زاویه‌های داخلی و خارجی یک هشت‌ضلعی منتظم را پیدا کنید.

چهارضلعی	ضلع‌های روبه‌رو برابر	ضلع‌های روبه‌رو موازی	زاویه‌های روبه‌رو برابر	قطرها منصف هم	قطرها برابر
متوازی‌الاضلاع	✓	✓	✓	✓	✗
مستطیل	✓	✓	✓	✓	✓
لوزی	✓	✓	✓	✓	✗
مربع	✓	✓	✓	✓	✓

۲) مجموع زاویه‌های داخلی هشت‌ضلعی $1080^\circ = 180 \times (2-8)$ است؛ هر زاویه‌ی داخلی $135^\circ = 8 \div 1080$ و هر زاویه‌ی خارجی $45^\circ = 135 - 180$ (یا $45^\circ = 8 \div 360$).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی هشتم - فصل چهارم

جبر و معادله

فهرست

۱۳۰ صفحه ۵۲ · فعالیت — مرور توان و عبارت جبری ۶۸

۱۳۱ صفحه ۵۲ · فعالیت — الگوی عددی با عبارت جبری ۶۸

۱۳۲ صفحه ۵۲ · فعالیت — شکل nام با چوب‌کبریت ۶۹

۱۳۳ صفحه ۵۳ · کار در کلاس — ضرب عدد در پرانتز و جمله‌های متشابه ۶۹

۱۳۴ صفحه ۵۳ · فعالیت — ضرب جمله در جمله و جمله در پرانتز ۷۰

۱۳۵ صفحه ۵۴ · کار در کلاس — ساده کردن عبارت‌ها ۷۱

۱۳۶ صفحه ۵۵ · تمرین — جمله‌ی nام و ضرب پرانتز ۷۲

۱۳۷ صفحه ۵۶ · فعالیت — ماشین عددساز ۷۳

۱۳۸ صفحه ۵۷ · کار در کلاس — جدول ورودی و خروجی ۷۳

۱۳۹ صفحه ۵۷ · فعالیت — عدد زوج و عبارت جبری ۷۴

۱۴۰ صفحه ۵۸ · فعالیت — زوج بودن عبارت‌های جبری ۷۴

۱۴۱ صفحه ۵۸ · کار در کلاس — زوج × فرد و نمایش عدد زوج ۷۵

۱۴۲ صفحه ۵۹ · تمرین — کاربرد عبارت جبری در مساحت و حجم ۷۶

۱۴۳ صفحه ۶۰ · فعالیت — تجزیه‌ی عبارت‌های جبری (۱) ۷۷

۱۴۴ صفحه ۶۱ · فعالیت — تجزیه‌ی عبارت‌های جبری (۲) ۷۸

۱۴۵ صفحه ۶۱ · کار در کلاس — تبدیل به ضرب و ساده کردن کسر جبری ۷۸

۱۴۶ صفحه ۶۲ · فعالیت — $2x$ و x^2 و $(a+b)^2$ ۷۹

۱۴۷ صفحه ۶۲ · کار در کلاس — توان و پرانتز ۸۰

۱۴۸ صفحه ۶۳ · تمرین — جمع اعداد فرد و زوج و ساده‌سازی ۸۰

۱۴۹ صفحه ۶۴ · فعالیت — پنج عدد متوالی با مجموع ۶۵ ۸۱

۱۵۰ صفحه ۶۵ · فعالیت — حل معادله ۸۲

۱۵۱ صفحه ۶۵ · کار در کلاس — حل معادله‌ها ۸۲

۱۵۲ صفحه ۶۶ · فعالیت — معادله‌ی کسری ۸۳

۱۵۳ صفحه ۶۶ · کار در کلاس — معادله‌های کسری ۸۳

۱۵۴ صفحه ۶۷ · تمرین — معادله‌های کسری و مسئله ۸۳

۱۵۵ صفحه ۶۷ · تمرین — مسئله‌های معادله ۸۴

۱۵۶ صفحه ۶۸ · تمرین ترکیبی — ساده‌سازی و معادله ۸۵

۱۳۰ صفحه ۵۲ فعالیت

۱ــ در سال گذشته با درس توان آشنا شدید. عبارت‌های کلامی را به صورت جبری و عبارت‌های جبری را به صورت کلامی بنویسید: هر عدد به توان یک، برابر خود عدد می‌شود؛ $a^0 = 1\ (a \neq 0)$؛ یک به توان هر عدد، برابر یک می‌شود؛ صفر به توان هر عدد مثبت، برابر صفر می‌شود؛ در ضرب دو عبارت توان‌دار با پایه‌های مساوی، یک پایه را می‌نویسیم و توان‌ها را با هم جمع می‌کنیم؛ a^b × a^c؛ مربع یا مجذور عدد a.

عبارت کلامی	عبارت جبری
هر عدد به توان یک برابر خود عدد است	$a^1 = a$
هر عدد غیرصفر به توان صفر برابر یک است	$a^0 = 1\ (a \neq 0)$
یک به توان هر عدد، یک می‌شود	$1^n = 1$
صفر به توان هر عدد مثبت صفر می‌شود	$0^n = 0\ (n > 0)$
ضرب توان‌ها با پایه‌ی مساوی: توان‌ها جمع می‌شوند	a^b × a^c = a^(b+c)
مربع (مجذور) عدد a	$a^2 = a \times a$

۱۳۱ صفحه ۵۲ فعالیت

۲ــ الف) در عبارت جبری 2n−1 به جای n عددهای طبیعی (1, 2, 3, ...) قرار دهید و الگوی عددی متناظر را بنویسید. ب) در عبارت جبری 2m+1 به جای m عددهای حسابی (0, 1, 2, 3, ...) قرار دهید و الگوی عددی متناظر را بنویسید. آیا دو الگوی عددی با هم تفاوت دارند؟

- الف) 2n−1: 1, 3, 5, 7, 9, ...
- ب) 2m+1: 1, 3, 5, 7, 9, ...

دو الگوی عددی با هم تفاوتی ندارند؛ هر دو عددهای فرد را می‌سازند (عبارت دوم یک واحد جلوتر شروع شده است، یعنی $m = n - 1$).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳۲ صفحه ۵۲ فعالیت

۳ــ شکل‌های زیر با چوب‌کبریت و با الگویی مشخص ساخته شده‌اند. شکل nام با چند چوب‌کبریت ساخته می‌شود؟ در اینجا پاسخ چهار دانش‌آموز را می‌بینید: ماهرخ: 3n+1؛ ماهنوش: 4+3(n−1)؛ ماهرو: n+n+n+1؛ مهتاب: (n+1)+(n×2). توضیح دهید هرکدام از آنها پاسخ خود را چگونه به دست آورده است؛ سپس مانند نمونه‌ها، شکل‌هایی رسم کنید که روش ماهنوش را مشخص کند و بین شکل‌ها و عبارت‌های جبری رابطه برقرار کنید. پاسخ‌های ماهنوش، ماهرو و مهتاب را ساده کنید. آیا با پاسخ ماهرخ یکی هستند؟ آیا شما هم روشی برای شمارش چوب‌کبریت‌ها و یافتن جمله‌ی nام دارید؟

- **ماهرخ:** هر شکل 3n چوب‌کبریت برای قسمت‌های تکراری و یک چوب‌کبریت اضافی دارد: 3n+1.
- **ماهنوش:** شکل اول ۴ چوب‌کبریت دارد و هر شکل بعدی ۳ چوب‌کبریت بیشتر از قبلی: 4+3(n−1).
- **ماهرو:** یک چوب‌کبریت اضافی و سه دسته‌ی n تایی: 1+n+n+n.
- **مهتاب:** n+1 چوب‌کبریت افقی/عمودی و 2n چوب‌کبریت مورب: (n+1)+2n.

ساده‌شده: 4+3n−3 = 4+3(n−1)؛ 1+n+n+n = 3n+1؛ (n+1)+2n = 3n+1. پس هر چهار پاسخ با هم برابرند. برای شکل ماهنوش، شکل اول (۴ چوب‌کبریت) را رسم می‌کنیم و در هر مرحله یک دسته‌ی ۳تایی دیگر به آن می‌افزاییم؛ در شکل nام، n−1 دسته‌ی ۳تایی افزوده شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳۳ صفحه ۵۳ کار در کلاس

۱ــ در سال گذشته، ضرب یک عدد را در پرانتز با شکل زیر یاد گرفتید: 5(a+b) = 5a+5b. این تساوی چگونه به کمک شکل به دست آمده است؟ توضیح دهید. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید: 3(2x−1)+2(x+3)، −2(y−1)+3(1−y)، −(a−b+1)+2(2a+b−3)

۲ــ شما همچنین جمع و تفریق جمله‌های متشابه (جمله‌هایی که همه‌ی قسمت‌های حرفی آنها یکی هستند) را یاد گرفتید. جمله‌های متشابه را پیدا کنید: $3x^2y$، 7، yx^2، 2yx، −5x، 5y، −3xy، $4x^2y$

مستطیلی به طول a+b و عرض 5 را با خطی به دو مستطیل به طول‌های a و b و عرض 5 تقسیم می‌کنیم؛ مساحت کل برابر مجموع مساحت دو قسمت است: 5(a+b) = 5a+5b.

- 3(2x−1)+2(x+3) = 6x−3+2x+6 = 8x+3
- −2(y−1)+3(1−y) = −2y+2+3−3y = −5y+5
- −(a−b+1)+2(2a+b−3) = −a+b−1+4a+2b−6 = 3a+3b−7

جمله‌های متشابه: $3x^2y$، yx^2 و $4x^2y$ (قسمت حرفی x^2y)؛ و 2yx و −3xy (قسمت حرفی xy). جمله‌های 7، −5x و 5y متشابه با دیگری نیستند.

۱۳۴ صفحه ۵۳ فعالیت

۱ــ حاصل ضرب دو جمله را مانند نمونه به دست آورید. از کدام قانون ساده‌کردن عبارت‌های توان‌دار استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید. (نمونه: $(-3ab)(2a^2b^3) = -6a^3b^4$، چون $a \times a^2 = a^3$ و $b \times b^3 = b^4$، $2a \times 3b =$
$-6a \times 2a^2 =$، $4ab \times 3b^2 =$

۲ــ با توجه به شکل و مساوی‌بودن مساحت‌ها در دو قسمت، یک تساوی جبری نتیجه بگیرید: $a(b+c) =$ ... +
.... با توجه به نتیجه‌ای که گرفته‌اید، ضرب‌های زیر را انجام دهید: $2a(a+b)$، $3x(2x-1)$

۳ــ با توجه به شکل و مساوی‌بودن مساحت‌ها در دو قسمت، تساوی جبری را کامل کنید: $(a+b)(c+d) =$
... + ... + ... + ... = $a(c+d)+b(c+d)$. برای یافتن حاصل‌ضرب دو عبارت جبری، باید جمله‌های دو عبارت را در هم ضرب و سپس ساده کنید: $(x-y)(x+y)$، $(x+1)(x-1)$، $(3x-2)(2x-3)$

- $2a \times 3b = 6ab$
- $-6a \times 2a^2 = -12a^3$ (ضریب‌ها در هم و $a \times a^2 = a^3$)
- $4ab \times 3b^2 = 12ab^3$ (قانون: در ضرب توان‌دارهای هم‌پایه، توان‌ها جمع می‌شوند)
- $a(b+c) = ab+ac$
- $2a(a+b) = 2a^2+2ab$
- $3x(2x-1) = 6x^2-3x$
- $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
- $(x+y)(x-y) = x^2-xy+xy-y^2 = x^2-y^2$
- $(x-1)(x+1) = x^2-1$
- $(3x-2)(2x-3) = 6x^2-9x-4x+6 = 6x^2-13x+6$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

توشه ای برای موفقیت

۱۳۵ صفحه ۵۴ کار در کلاس

۱ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$9x+7x-8x-3+11x+5 = 2a-8xy+2xy = 3ab+b^2-a^2-5ab = 4ax+a^2+ax =$

$(-4/5)(2y) = (-7)(-4x) = (3/2)(4b) = 5(-2a) =$

$(-a)(-a) = (-a)(-b) = (-1/2)a(3b) = 3a(-5x) =$

$(a+6)(a-6) = (x+2)(x+1) = 3y(2x-5y) = 2x(3a-b) =$

۲ــ عدد ۴۷ را می‌توان به صورت $7+40$ یا $7+10\times4$ نوشت؛ به همین ترتیب، عددهای 92، 75، 33 را به صورت گسترده بنویسید. عدد دورقمی ab را با نماد ab (با خط بالای آن) نمایش می‌دهیم؛ بنابراین $ab = 10a+b$.

- $4ax+a^2+ax = 5ax+a^2$
- $3ab+b^2-a^2-5ab = -2ab+b^2-a^2$
- $2a-8xy+2xy = 2a-6xy$
- $9x+7x-8x-3+11x+5 = 19x+2$
- $5(-2a) = -10a$
- $(3/2)(4b) = 6b$
- $(-7)(-4x) = 28x$
- $(-4/5)(2y) = -8y/5$
- $3a(-5x) = -15ax$
- $(-1/2)a(3b) = -3ab/2$
- $(-a)(-b) = ab$
- $(-a)(-a) = a^2$
- $2x(3a-b) = 6ax-2bx$
- $3y(2x-5y) = 6xy-15y^2$
- $(x+2)(x+1) = x^2+3x+2$
- $(a+6)(a-6) = a^2-36$

$92 = 90+2 = 9\times10+2$؛ $75 = 70+5 = 7\times10+5$؛ $33 = 30+3 = 3\times10+3$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۳۶ صفحه ۵۵ تمرین

۱ــ عبارت جبری جمله‌ی nام هریک از الگوهای عددی زیر را بنویسید. ... ,1, 4, 9, 16, 25 و ,1, 8, 27, 64, 125 ...

۲ــ عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید. (a+3)(a+3)، (a−b)(a−b)، (a+3)(a−3)، (a+b)(a−b)، (x+y)(x+y)، (2x−3y)(2x−3y)

۳ــ مساحت هر شکل را با یک عبارت جبری بیان کنید.

۴ــ دانش‌آموزی، عبارت‌های جبری زیر را نادرست ساده کرده است. اشتباه او را پیدا کنید. الف) a(b+c) = ab+c ب) 2x+3y−(2x−y) = 2x+3y−2x−y = 2y

۵ــ با توجه به شکل، یک تساوی جبری بنویسید.

- جمله‌ی nام الگوی اول: n^2 (مربع‌ها: $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$)
- جمله‌ی nام الگوی دوم: n^3 (مکعب‌ها)
- $(a+3)(a+3) = a^2+6a+9$
- $(a-b)(a-b) = a^2-2ab+b^2$
- $(a+3)(a-3) = a^2-9$
- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
- $(x+y)(x+y) = x^2+2xy+y^2$
- $(2x-3y)(2x-3y) = 4x^2-12xy+9y^2$

۳) مساحت مستطیل: طول × عرض؛ مثلث: ah/2 = 2/(قاعده × ارتفاع)؛ ذوزنقه: (a+b)h)/2)؛ دایره: πr^2. هر شکل را با فرمول متناظرش بنویسید.

- الف) a(b+c) باید به صورت ab+ac نوشته شود؛ دانش‌آموز a را فقط در b ضرب کرده و در c ضرب نکرده است.
- ب) علامت منفی پشت پرانتز باید در هر دو جمله ضرب شود: −(2x−y) = −2x+y؛ پس حاصل 2x+3y−2x+y = 4y است، نه 2y.

۵) مثلاً اگر مستطیل بزرگ به طول x+y و عرض x به دو مستطیل تقسیم شده باشد: $x(x+y) = x^2+xy$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۳۷ صفحه ۵۶ فعالیت

۱ــ ماشین عددساز عدد ورودی را در عدد داخل ماشین ضرب می‌کند. ماشین عددسازِ دیگر عدد ورودی را با عدد داخل ماشین جمع می‌کند. مانند نمونه، خروجی هر ماشین را مشخص کنید یا عدد داخل ماشین را بنویسید.

۲ــ خروجی یک ماشین را به ورودی یک ماشین می‌بندیم و یک ماشین ترکیبی می‌سازیم. مانند نمونه، خروجی هر ماشین را مشخص کنید. به این ترتیب، می‌توانیم عملکرد هر ماشین ترکیبی را به شکل خلاصه بنویسیم: $x \rightarrow \times 7 \rightarrow +4 \rightarrow y$، $y = 7x+4$.

در ماشین ضرب، خروجی = ورودی × عدد ماشین؛ در ماشین جمع، خروجی = ورودی + عدد ماشین. اگر ورودی و خروجی معلوم باشند، عدد ماشین با تقسیم (در ضرب) یا تفریق (در جمع) پیدا می‌شود؛ مثلاً ورودی 7 و خروجی 21- در ماشین ضرب: عدد ماشین $-21 \div 7 = -3$.

در ماشین ترکیبی خروجی ماشین اول وارد ماشین دوم می‌شود؛ مثلاً ماشین $\times(-5)$ و سپس $+3$: ورودی x خروجی $-5x+3$ می‌دهد و برای $x = 6$ خروجی 27- است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳۸ صفحه ۵۷ کار در کلاس

۱ــ عدد x به ماشین‌های زیر وارد، و عدد y از آنها خارج می‌شود. با توجه به کاری که این ماشین‌ها انجام می‌دهند، عددهای خروجی را بنویسید.

۲ــ با توجه به جدول‌های زیر و رابطه‌ی x و y، جاهای خالی جدول‌ها را پر کنید: $y = 3x+1$، $y = 5x$، $y = x-7$، $y = 2x-3$.

۳ــ با توجه به عددهای ورودی و خروجی در هر ردیف، کاری را که ماشین انجام می‌دهد حدس بزنید. (5←10، 7-←14-، 3←6) و (4-←1-، 11←14، 5←8)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

برای هر مقدار x، مقدار y از رابطه به دست می‌آید؛ مثلاً در $y = 3x+1$: $x = 1 \Rightarrow y = 4$، $x = 2 \Rightarrow y = 7$، $x = 5 \Rightarrow y = 16$؛ در $y = 2x-3$: $x = 4 \Rightarrow y = 5$؛ در $y = x-7$: $x = 14 \Rightarrow y = 7$؛ در $y = 5x$: $x = 2 \Rightarrow y = 10$.

- ردیف اول: 5←10، 7-←14-، 3←6 ⇒ ماشین عدد را بر ۲ تقسیم می‌کند: $y = x/2$
- ردیف دوم: 4-←1-، 11←14، 5←8 ⇒ ماشین ۳ واحد کم می‌کند: $y = x-3$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۳۹ صفحه ۵۷ فعالیت

۱ــ به عددهای زوج زیر توجه کنید. همان‌طور که می‌بینید، هر عدد زوج را می‌توان به صورت 2×n نشان داد. 2 = 2×1، 4 = 2×2، 6 = 2×3، 8 = 2×4، 10 = 2×5

عدد زوج عددی است که بر ۲ بخش‌پذیر باشد؛ پس هر عدد زوج به صورت 2n (n عدد طبیعی) است؛ مثلاً 2 = 2×1، 4 = 2×2، 6 = 2×3. هر عدد فرد هم به صورت 2n−1 (یا 2n+1) نوشته می‌شود.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.

irantooshe.ir

۱۴۰ صفحه ۵۸ فعالیت

۴ــ a، b و c را عددهای طبیعی در نظر بگیرید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید: ــ آیا عبارت 2b یک عدد زوج را نشان می‌دهد؟ ــ آیا عبارت 4c یک عدد زوج را نشان می‌دهد؟ چرا؟ ــ آیا عبارت 2ab یک عدد زوج را نشان می‌دهد؟ چرا؟

۵ــ آیا حاصل‌ضرب هر دو عدد زوج عددی زوج است؟ برای پاسخ‌دادن به این سؤال، ابتدا مانند نمونه چند مثال بزنید (8 = 2×4، ...). برای اینکه بدون مثال و در حالت کلی اثبات کنیم که جمله‌ی بالا درست است، دو عدد زوج را به صورت 2n و 2m در نظر می‌گیریم و حاصل‌ضرب آنها را می‌نویسیم: 2m × 2n = 2(m × 2 × n). چگونه این تساوی ثابت می‌کند که حاصل‌ضرب دو عدد زوج عددی زوج است؟ توضیح دهید.

- 2b زوج است؛ چون ۲ برابر عدد طبیعی b است.
- 4c = 2×(2c) زوج است؛ چون ۲ برابر عدد طبیعی 2c است.
- 2ab = 2×(ab) زوج است؛ چون ۲ برابر عدد طبیعی ab است.

مثال‌ها: 8 = 2×4، 48 = 6×8، 40 = 4×10، 4 = 2×2. همه زوج‌اند.

در 2m × 2n = 2(m × 2 × n) حاصل‌ضرب به صورت ۲ برابر یک عدد طبیعی (2mn) نوشته شده است؛ هر عددی که ۲ برابر یک عدد طبیعی باشد زوج است؛ پس حاصل‌ضرب هر دو عدد زوج، زوج است.

۱۴۱ صفحه ۵۸ کار در کلاس

۱ــ مانند سؤال ۵ فعالیت بالا، ثابت کنید که حاصل‌ضرب یک عدد زوج در یک عدد فرد، عددی زوج است. الف) چند مثال بزنید. ب) به صورت جبری ثابت کنید: عدد زوج $2n$ =، عدد فرد $2m-1$ =، حاصل‌ضرب $(2n)(2m-1)$.

۲ــ عددهای زوج زیر را به صورت $2n$ (n یک عدد طبیعی باشد) نشان دهید. 44، 80، 700، 10000، 2000

۳ــ در عبارت‌های $2k$، $2m$ و $2a$ به جای حروف k، m و a عددهای طبیعی مختلفی قرار دهید. آیا عددهای حاصل، زوج‌اند؟

۱) مثال‌ها: $2\times3=6$، $4\times5=20$، $6\times7=42$؛ همه زوج‌اند. اثبات: $(2n)(2m-1)=2\cdot[n(2m-1)]$ که ۲ برابر یک عدد طبیعی است؛ پس زوج است.

- $2\times22=44$
- $2\times40=80$
- $2\times350=700$
- $2\times5000=10000$
- $2\times1000=2000$

بله؛ هر عبارتِ به شکل (عدد طبیعی)×2 زوج است؛ مثلاً $k=3\Rightarrow 2k=6$، $m=7\Rightarrow 2m=14$، $a=10\Rightarrow 2a=20$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴۲ صفحه ۵۹ تمرین

۱ــ مساحت کل مکعب مستطیل روبه‌رو را به صورت جبری بنویسید. اگر a = 2، b = 6 و c = 3 باشند، مساحت کل چقدر می‌شود؟

۲ــ مساحت قاعده‌ی منشوری 20 و ارتفاع آن 4 است. حجم این منشور را با نوشتن رابطه‌ی جبری حجم منشورها به دست آورید.

۳ــ قاعده‌های ذوزنقه‌ای 4 و 7 سانتی‌متر و ارتفاع آن 2 سانتی‌متر است. مساحت این ذوزنقه را پس از نوشتن رابطه‌ی جبری مساحت ذوزنقه حساب کنید.

۴ــ آیا x = 2 و x = −2 پاسخ معادله‌ی $x^2 = 4$ هستند؟ چرا؟

۵ــ طول یک لوله x متر است. طول لوله‌ی دیگر، y برابر لوله‌ی اول است. طول لوله‌ی دوم را به صورت جبری بنویسید.

۶ــ یک زمین والیبال مستطیل شکل، دارای x متر عرض و 2x متر طول است. مساحت این زمین را به صورت جبری نشان دهید. اگر عرض این زمین 9 متر باشد، مساحت آن چند متر مربع است؟

۷ــ در درس علوم یاد می‌گیرید که انرژی پتانسیل ذخیره‌شده در هر جسم از رابطه‌ی U = m·g·h به دست می‌آید. در صورتی که جسمی به جرم ۲۵ کیلوگرم تا ارتفاع ۴ متر بالا برود، مقدار انرژی پتانسیل آن را پیدا کنید. (شتاب زمین را ۱۰ فرض کنید.)

۸ــ با توجه به رابطه‌ی x و y، مقدار y را برای xهای مختلف پیدا کنید: $y = x^2$ (x = 1, 0, 2, −1)؛ y = x−3 (x = 1,)؛ y = −2x+1 (x = 2, −2, 0, −1).

۱

مساحت کل مکعب مستطیل: 2(ab+bc+ac)؛ برای a=2، b=6، c=3: 2×36 = 72 = 2(12+18+6).

۲

حجم منشور مساحت قاعده × ارتفاع = 4×20 = 80 =.

۳

مساحت ذوزنقه 11 = 2/(2×(4+7)) = 2/((a+b)×h) = سانتی‌متر مربع.

۴

بله، هر دو؛ چون $2^2 = 4$ و $(-2)^2 = 4$. (اگر معادله 2x = 4 باشد، فقط x = 2 پاسخ است، زیرا 4 ≠ 4− = 2×(−2).)

۵

طول لوله‌ی دوم xy = x × y متر است.

۶

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

مساحت $2x^2 = 2x \times x =$؛ برای $x = 9$: $2 \times 81 = 162$ متر مربع.

۷

$U = 25 \times 10 \times 4 = 1000$ (ژول).

۸

رابطه	x	y
$y = x^2$	1, 0, 2-, 1-	1, 4, 0, 1
$y = x-3$	1, 0, 2, 1-	4-, 1-, 3-, 2-
$y = -2x+1$	2, 2-, 0, 1-	3, 1, 5, 3-

۱۴۳ صفحه ۶۰ **فعالیت**

۱ــ در دوره‌ی دبستان یاد گرفتید که با تبدیل صورت و مخرج کسر به ضرب عددها، می‌توان کسر را ساده کرد. کسرهای 12/18 و 15/35 را مانند نمونه ساده کنید.

۲ــ بعضی از عبارت‌های جبری را نیز می‌توان به صورت ضرب دو یا چند عبارت نوشت: $a(b+c) = ab+ac$ (خاصیت توزیع‌پذیری)؛ $ab+ac = a(b+c)$ (تجزیه کردن، تبدیل به ضرب). با توجه به تساوی بالا، عبارت‌ها را به ضرب تبدیل کنید: $5ab+8ac = a(...+...)$، x^2+xy، $5ab+3b$، $3a+ab$.

۳ــ برای تجزیه‌ی یک عبارت جبری، عامل یا بخش مشترک دو یا چند جمله را پیدا می‌کنیم و بیرون پرانتز می‌نویسیم: $6a^2b^3+9a^3b^2 = 2\times3\times a\times a\times b\times b\times b + 3\times3\times a\times a\times a\times b\times b$. عامل مشترک دو جمله‌ی عبارت جبری چیست؟ با ضرب‌کردن چه عبارتی در جمله‌ی مشترک، جمله‌ی اول عبارت ساخته می‌شود؟ و جمله‌ی دوم؟ حالا تساوی $6a^2b^3+9a^3b^2 = (...+...)...$ را کامل کنید.

- $12/18 = (2\times6)/(3\times6) = 2/3$
- $15/35 = (3\times5)/(7\times5) = 3/7$
- $5ab+8ac = a(5b+8c)$
- $x^2+xy = x(x+y)$
- $5ab+3b = b(5a+3)$
- $3a+ab = a(3+b)$

عامل مشترک دو جمله $3a^2b^2$ است؛ برای ساخت جمله‌ی اول باید آن را در $2b$ و برای جمله‌ی دوم در $3a$ ضرب کرد:

$6a^2b^3+9a^3b^2 = 3a^2b^2(2b+3a)$

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۴۴ صفحه ۶۱ فعالیت

۴ــ با توجه به سؤال صفحه‌ی قبل، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید: $ab+ac$، $ab-ac$، $5ab+3abc$، $6ab+3a^2$، $4x^2y+6xy^2$، $8x^2y^3-4xy^2$

۵ــ ابتدا صورت و مخرج کسر را تجزیه و سپس آن را ساده کنید: $(ab+ac)/(ab-ac)$ $(a\neq0, b\neq c)$؛ $(a^2-ab)/(ab-b^2)$

- $ab+ac = a(b+c)$
- $ab-ac = a(b-c)$
- $5ab+3abc = ab(5+3c)$
- $6ab+3a^2 = 3a(2b+a)$
- $4x^2y+6xy^2 = 2xy(2x+3y)$
- $8x^2y^3-4xy^2 = 4xy^2(2xy-1)$
- $(ab+ac)/(ab-ac) = a(b+c)/a(b-c) = (b+c)/(b-c)$
- $(a^2-ab)/(ab-b^2) = a(a-b)/b(a-b) = a/b$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۵ صفحه ۶۱ کار در کلاس

۱ــ عبارت‌های زیر را به ضرب تبدیل کنید: $2ax-2ay$، $42xy^3-35x^2y^2$، $2x^2y-2x^2z$، $-a^2+2a^3$

۲ــ با تبدیل به ضرب، صورت و مخرج کسر را ساده کنید $(a\neq0, b\neq0, a\neq b)$.

۳ــ آیا تساوی $-(a+b) = -b-a$ همواره برقرار است؟

۴ــ چرا مجموع دو عدد زوج، عددی زوج می‌شود؟ ($2m$: یک عدد زوج، $2n$: عدد زوج دیگر، $2m+2n$: مجموع دو عدد زوج)

- $2ax-2ay = 2a(x-y)$
- $42xy^3-35x^2y^2 = 7xy^2(6y-5x)$
- $2x^2y-2x^2z = 2x^2(y-z)$
- $-a^2+2a^3 = a^2(-1+2a)$

در کسر جبری هر عامل مشترک صورت و مخرج را ساده می‌کنیم؛ مثلاً $(a^2b-ab^2)/(ab) = ab(a-b)/(ab) = a-b$.

بله؛ $-(a+b) = -a-b$ و $-b-a$ هم همان است؛ چون جمع خاصیت جابه‌جایی دارد $(a+b = b+a)$ و علامت منفی در هر دو جمله ضرب می‌شود.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

$2m+2n = 2(m+n)$؛ مجموع به صورت ۲ برابر یک عدد طبیعی نوشته شده است؛ پس زوج است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۶ صفحه ۶۲ فعالیت

۱ــ تفاوت $2x$ و x^2 چیست؟ ($2x = ?$ ،$x^2 = ?$)

۲ــ مانند نمونه، طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید. $3^2 = 3\times 3$؛ $(-5)^2 = \ldots \times \ldots$؛ $a^2 = \ldots \times \ldots$؛ $(a+b)^2 = \ldots \times \ldots$

۳ــ جدول زیر را برای مقدارهای مختلف a و b کامل کنید؛ a: −1, 2, 0, 2, 1، b: −2, 4, −3, 0, 1. از مقایسه‌ی دو ردیف آخر، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ($(a+b)^2$ و a^2+b^2)

۴ــ مانند نمونه، عبارت‌ها را ساده کنید. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$؛ $(x-y)^2$؛ $(2x+1)^2$

$2x = x+x$ یعنی دو برابر x، ولی $x^2 = x\times x$ یعنی x ضرب در خودش؛ مثلاً برای $x = 5$: $2x = 10$ و $x^2 = 25$.

- $(-5)^2 = (-5)\times(-5) = 25$
- $a^2 = a\times a$
- $(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b)$

a	b	$(a+b)^2$	a^2+b^2
1−	2−	9	5
2	4	36	20
0	3−	9	9
2	0	4	4
1	1	4	2

نتیجه: $(a+b)^2$ با a^2+b^2 در حالت کلی مساوی نیست (فقط وقتی $ab = 0$ باشد مساوی می‌شوند)؛ در واقع $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$.

- $(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2-xy-xy+y^2 = x^2-2xy+y^2$
- $(2x+1)^2 = (2x+1)(2x+1) = 4x^2+2x+2x+1 = 4x^2+4x+1$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۴۷ صفحه ۶۲ — کار در کلاس

۱ــ مانند نمونه، تساوی‌ها را کامل کنید. $x^3 = x\times x\times x$؛ $-x^2 = ?$؛ $(-x)^2 = ?$؛ $(a-b)^2 = ?$؛ $(a+b)^3 = ?$؛ $(x+1)^2 = ?$

۲ــ چرا $ab = ba$ است؟ (از کدام خاصیت ضرب استفاده می‌شود؟)

۳ــ عبارت $-(a+b)^2$ را ساده کنید. آیا منفی به توان ۲ می‌رسد؟ چرا؟

- $-x^2 = -(x\times x)$
- $(-x)^2 = (-x)(-x) = x^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $(x+1)^2 = x^2+2x+1$

از خاصیت **جابه‌جایی ضرب** استفاده می‌شود: $ab = ba$.

$-(a+b)^2 = -(a^2+2ab+b^2) = -a^2-2ab-b^2$. خیر؛ توان فقط به پرانتز $(a+b)$ می‌رسد و علامت منفی بعد از به توان رساندن در عبارت ضرب می‌شود.

۱۴۸ صفحه ۶۳ — تمرین

۱ــ آیا $a-b = -(a-b)$ است؟ چرا؟

۲ــ چرا مجموع دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود؟

۳ــ مجموع دو عدد که یکی زوج و دیگری فرد باشد، زوج می‌شود یا فرد؟ چرا؟

۴ــ عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید: $(a+3)^2$، $(2x-3y)^2$، $(x+7)(x-7)$، $a^2+b^2-(a-b)^2$

۵ــ با توجه به پیکان‌های رسم‌شده، عبارت $(x-1)(x^2+x+1)$ را ساده کنید.

۶ــ نشان دهید که تفاضل هر عدد دورقمی از مقلوبش، مضرب ۹ است.

۷ــ اگر دو پرانتز $(a+b+c)(z+y+x)$ را در هم ضرب کنیم، چند جمله خواهیم داشت؟ چرا؟

۱) خیر؛ $-(a-b) = -a+b = b-a$ که با $a-b$ برابر نیست (قرینه‌ی آن است)، مگر وقتی $a = b$.

۲) دو عدد فرد را $2m-1$ و $2n-1$ می‌گیریم: $(2m-1)+(2n-1) = 2m+2n-2 = 2(m+n-1)$ که ۲ برابر یک عدد طبیعی است؛ پس زوج است.

۳) فرد؛ $2m+(2n-1) = 2(m+n)-1$ که از یک عدد زوج یک واحد کمتر است.

- $(a+3)^2 = a^2+6a+9$
- $(2x-3y)^2 = 4x^2-12xy+9y^2$
- $(x+7)(x-7) = x^2-49$
- $a^2+b^2-(a-b)^2 = a^2+b^2-a^2+2ab-b^2 = 2ab$

۵) $(x-1)(x^2+x+1) = x^3+x^2+x-x^2-x-1 = x^3-1$.

۶) عدد دورقمی $ab = 10a+b$ و مقلوبش $ba = 10b+a$؛ تفاضل: $(10a+b)-(10b+a) = 9a-9b = 9(a-b)$ که مضرب ۹ است.

۷) 9 جمله؛ هر یک از ۳ جمله‌ی پرانتز اول در هر یک از ۳ جمله‌ی پرانتز دوم ضرب می‌شود ($3\times3 = 9$) و چون متغیرها همه متفاوت‌اند، جمله‌ی متشابهی برای ساده‌کردن وجود ندارد.

۱۴۹ صفحه ۶۴ **فعالیت**

۱ــ حاصل‌جمع پنج عدد متوالی طبیعی ۶۵ شده است. عدد وسط چه عددی است؟ پنج دانش‌آموز این مسئله را با راهبردهای مختلف حل کرده‌اند. راه‌حل هر کدام را کامل کنید و توضیح دهید. سمیه: راهبرد حدس و آزمایش؛ فریده: راهبرد رسم شکل (10 + ...×5 = 65)؛ فهیمه: راهبرد روش‌های نمادین (+(+2+□)+(+1+□)+□ = 65 (+4+□)+(+3+□))؛ مهدیه: راهبرد تشکیل معادله (65 = (x+4)+(x+3)+(x+2)+(x+1)+x، 65 = 5x+10)؛ فرشته: 65 = (x+2)+(x+1)+x+(x−1)+(x−2). تفاوت راه‌حل‌های فرشته و مهدیه را توضیح دهید.

عدد وسط 13 است؛ اعداد 11, 12, 13, 14, 15 هستند (65 = 15+14+13+12+11).

- **سمیه:** با حدس عدد اول (مثلاً ۳، ۷، ۹، ۱۱ ...) و محاسبه‌ی مجموع، آزمایش می‌کند تا مجموع ۶۵ شود؛ برای عدد اول ۱۱ مجموع ۶۵ می‌شود.
- **فریده:** هر عدد را با ۱ واحد اضافی نشان می‌دهد: پنج عدد برابر عدد اول هستند و مجموع اختلاف‌ها (10 = 4+3+2+1+0) باقی می‌ماند: 10 = 65−(عدد اول)×5 ⇒ عدد اول 11.
- **فهیمه:** عدد اول را با □ نشان می‌دهد: 65 = 10+□5 ⇒ □ = 11.
- **مهدیه:** عدد اول را x گرفته: 65 = 5x+10 ⇒ x = 11 و عدد وسط 13 = x+2.
- **فرشته:** عدد وسط را x گرفته: 65 = 5x ⇒ x = 13 که مستقیماً عدد وسط است.

تفاوت: مهدیه عدد اول را مجهول گرفته و باید برای رسیدن به عدد وسط دو واحد اضافه کند؛ فرشته عدد وسط را مجهول گرفته است و جمله‌های +2, +1, −1, −2 با هم ساده می‌شوند و معادله ساده‌تر (65 = 5x) می‌شود.

۱۵۰ صفحه ۶۵ فعالیت

۲ــ مهدیه با توجه به آنچه سال گذشته آموخته بود، معادله‌ی خود را به صورت زیر حل کرد: 5x+10 = 65، 5x+10−10 = 65−10، 5x = 55، (1/5)×5x = (1/5)×55، x = 11. معلم راه‌حل مهدیه را به صورت زیر خلاصه کرد: 5x+10 = 65، 5x = 65−10، x = 55/5 = 11 ⟵ 5x = 55. توضیح دهید در این روش معنی پیکان‌ها چیست؟

۳ــ با توجه به سؤال بالا، روش حل معادله را توضیح دهید؛ سپس معادله‌های 2x−3 = x+5، 3x−1 = x−7 و 2(x−1) = 3(x+4) را به همین ترتیب حل کنید.

پیکان‌ها نشان می‌دهند که یک جمله را از یک طرف معادله به طرف دیگر می‌بریم و علامتش عوض می‌شود (10+ در طرف دیگر 10− می‌شود)؛ و ضریب x را از طرفی که ضرب شده به طرف دیگر به صورت تقسیم می‌بریم.

روش: جمله‌های شامل x را در یک طرف و عددها را در طرف دیگر جمع می‌کنیم (با عوض‌کردن علامت)، سپس هر دو طرف را بر ضریب x تقسیم می‌کنیم.

- $2x-3 = x+5 \Rightarrow 2x-x = 5+3 \Rightarrow x = 8$
- $3x-1 = x-7 \Rightarrow 3x-x = -7+1 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$
- $2(x-1) = 3(x+4) \Rightarrow 2x-2 = 3x+12 \Rightarrow 2x-3x = 12+2 \Rightarrow -x = 14 \Rightarrow x = -14$

۱۵۱ صفحه ۶۵ کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید. 5(x−2) = 8x+4؛ 2x−1+5x = 4x−3؛ 1−2x = −(x−1)+2؛ 2(x−1) = 3(1−x)؛ 2x−3(1−x) = 0

- $5(x-2) = 8x+4 \Rightarrow 5x-10 = 8x+4 \Rightarrow -3x = 14 \Rightarrow x = -14/3$
- $4x-3 = 2x-1+5x \Rightarrow 4x-3 = 7x-1 \Rightarrow -3x = 2 \Rightarrow x = -2/3$
- $1-2x = -(x-1)+2 \Rightarrow 1-2x = -x+3 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2$
- $2(x-1) = 3(1-x) \Rightarrow 2x-2 = 3-3x \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$
- $2x-3(1-x) = 0 \Rightarrow 2x-3+3x = 0 \Rightarrow 5x = 3 \Rightarrow x = 3/5$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵۲ صفحه ۶۶ فعالیت

۱ــ معادله‌ی x/2 − 1/3 = 5/6 را دو دانش‌آموز حل کرده‌اند. راه‌حل آنها را توضیح دهید. ویژگی‌های هرکدام از روش‌ها را بگویید و در کلاس با یکدیگر در این باره گفت‌وگو کنید. چرا یکتا عدد ۶ را برای ضرب‌کردن انتخاب کرده است؟

۲ــ دو دانش‌آموز کسر x/3 − (x+3)/2 را به صورت زیر در ۶ ضرب کرده‌اند. کدام یک اشتباه کرده است؟ اشتباه او را توضیح دهید. (6 × (x/3 − (x+3)/2) = 2x − 3x − 9 و 6 × (x/3 − (x+3)/2) = 2x − 3x + 9 = ...)

یکتا: دو طرف معادله را در ۶ ضرب کرده تا مخرج‌ها از بین بروند: 3x−2 = 5 ⇒ 3x = 7 ⇒ x = 7/3. عدد ۶ را انتخاب کرده چون کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌های ۲، ۳ و ۶ است؛ در نتیجه همه‌ی کسرها عدد صحیح می‌شوند.

یگانه: کسرها را مستقیم حل می‌کند: x/2 = 5/6 + 1/3 = 5/6 + 2/6 = 7/6 ⇒ x = 7/6 × 2 = 7/3. هر دو روش به پاسخ یکسان x = 7/3 می‌رسند.

۲) اشتباه، در دانش‌آموزی است که 6 × (−(x+3)/2) = −3(x+3) = −3x−9 را به صورت −3x+9 نوشته است؛ علامت منفی باید در هر دو جمله‌ی داخل پرانتز ضرب شود. حاصل درست −x−9 = 2x−3x−9 است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۳ صفحه ۶۶ کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید (معادله‌های دارای کسر).

در هر معادله‌ی کسری، دو طرف را در ک.م.م مخرج‌ها ضرب می‌کنیم تا کسرها حذف شوند؛ سپس مانند معادله‌های عادی حل می‌کنیم. مثلاً: (x+1)/2 + (x+2)/3 = 12 را در ۶ ضرب می‌کنیم: 3(x+1) + 2(x+2) = 72 ⇒ 5x+7 = 72 ⇒ x = 13.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۴ صفحه ۶۷ تمرین

۱ــ معادله‌های زیر را حل کنید (معادله‌های کسری).

هر معادله‌ی کسری را با ضرب دو طرف در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها ساده می‌کنیم؛ سپس جمله‌های x را به یک طرف می‌بریم و بر ضریب x تقسیم می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵۵ صفحه ۶۷ تمرین

۲ــ عرض مستطیلی 5 سانتی‌متر و محیط آن 24 سانتی‌متر است. طول این مستطیل چقدر است؟

۳ــ هفت برابر عددی به اضافه‌ی 4 مساوی 58 است. آن عدد چند است؟

۴ــ حاصل‌جمع سه عدد متوالی طبیعی 27 شده است. کوچک‌ترین این عددها را پیدا کنید.

۵ــ از پنج برابر عددی 3 تا کم کردیم، عدد 17 به دست آمد. آن عدد چند است؟

۶ــ اگر مربع عددی به آن عدد اضافه شود، عدد حاصل، 42 خواهد بود. کدام یک از اندازه‌های زیر می‌تواند مقدار آن عدد باشد؟ الف) 42 ب) 14 ج) 6- د) 7- هـ) 5-

۷ــ پدری 45 سال دارد. دو فرزند او 9 و 14 ساله‌اند. پس از چند سال سن پدر با مجموع سن فرزندانش برابر می‌شود؟

۸ــ در درس علوم یاد گرفتید که کار انجام‌شده با مقدار نیرو در اندازه‌ی جابه‌جایی برابر است: W = F·d. اگر کار انجام‌شده 12 و مقدار نیرو 4 باشد، مقدار جابه‌جایی را حساب کنید.

۹ــ با توجه به شکل، معادله تشکیل دهید و مقدار مجهول را بیابید. (x+4 و 2x-3؛ 2y-10° و 3y-70°)

---

۲) محیط (طول + عرض)2 =: l = 7 ⇒ l+5 = 12 ⇒ 2(l+5) = 24 سانتی‌متر.

۳) 7x+4 = 58 ⇒ 7x = 54 ⇒ x = 54/7.

۴) اعداد x, x+1, x+2؛ 3x+3 = 27 ⇒ x = 8؛ کوچک‌ترین عدد 8 است (۸، ۹، ۱۰).

۵) 5x-3 = 17 ⇒ 5x = 20 ⇒ x = 4.

۶) $x^2+x = 42$؛ فقط x = -7 جواب می‌دهد: $(-7)^2+(-7) = 49-7 = 42$. گزینه‌ی (د). (بررسی بقیه: 30 ⇒ 6-، 5- ⇒ 20، 210 ⇒ 14، 1806 ⇒ 42 پس درست نیستند.)

۷) پس از t سال: 45+t = (9+t)+(14+t) = 23+2t ⇒ t = 22 سال.

۸) 12 = 4×d ⇒ d = 3.

۹) ضلع‌های روبه‌روی متوازی‌الاضلاع برابرند: x+4 = 2x-3 ⇒ x = 7 و زاویه‌های روبه‌رو برابرند: 2y-10° = 3y-70° ⇒ y = 60°.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۵۶ صفحه ۶۸ تمرین ترکیبی

۱ــ عبارت جبری $(a+b)^2-(a-b)^2$ را ساده کنید. مقدار عددی عبارت حاصل را به ازای $a = 2$ و $b = -2$ به دست آورید.

۲ــ معادله‌های زیر را حل کنید: $2x-1 = 3(x-1)$؛ $(x-1)/2 + (x-1)/3 = 1/6$

$(a+b)^2-(a-b)^2 = (a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2) = 4ab$؛ برای $a = 2$ و $b = -2$: $4\times2\times(-2) = -16$.

- $(x-1)/2 + (x-1)/3 = 1/6$: دو طرف را در ۶ ضرب می‌کنیم: $3(x-1)+2(x-1) = 1 \Rightarrow 5(x-1) = 1 \Rightarrow x-1 = 1/5 \Rightarrow x = 6/5$
- $2x-1 = 3(x-1) \Rightarrow 2x-1 = 3x-3 \Rightarrow x = 2$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی هشتم - فصل پنجم

بردار و مختصات

فهرست

۱۵۷ صفحه ۷۰ · فعالیت — مسیر حرکت و بردار ۸۷

۱۵۸ صفحه ۷۰ · فعالیت — روبات و جمع دو حرکت ۸۷

۱۵۹ صفحه ۷۱ · کار در کلاس — جمع برداری و جمع مختصاتی ... ۸۸

۱۶۰ صفحه ۷۱ · فعالیت — بردارهای مساوی و جابه‌جایی جمع ... ۸۸

۱۶۱ صفحه ۷۲ · فعالیت — جمع سه بردار و روش‌های مختلف جمع ... ۸۹

۱۶۲ صفحه ۷۲ · کار در کلاس — رسم جمع بردارها و بردار صفر ... ۸۹

۱۶۳ صفحه ۷۳ · فعالیت — تجزیه‌ی بردار ۹۰

۱۶۴ صفحه ۷۳ · تمرین — کشیدن قایق با دو طناب ۹۰

۱۶۵ صفحه ۷۳ · تمرین — جمع برداری در شکل و حل تساوی مختصاتی ... ۹۰

۱۶۶ صفحه ۷۴ · فعالیت — ضرب عدد در بردار ۹۱

۱۶۷ صفحه ۷۵ · کار در کلاس — رسم ضرب عدد در بردار ۹۱

۱۶۸ صفحه ۷۵ · فعالیت — ترکیب ضرب و جمع بردارها ۹۲

۱۶۹ صفحه ۷۶ · کار در کلاس — نوشتن بردار برحسب دو بردار دیگر ... ۹۲

۱۷۰ صفحه ۷۶ · تمرین — رسم و محاسبه‌ی بردارهای ترکیبی ... ۹۲

۱۷۱ صفحه ۷۷ · تمرین — تجزیه‌ی وزن و محاسبه‌ی مختصات ... ۹۳

۱۷۲ صفحه ۷۸ · فعالیت — بردارهای واحد مختصات ۹۴

۱۷۳ صفحه ۷۹ · کار در کلاس — نوشتن بردار برحسب i و j ۹۵

۱۷۴ صفحه ۷۹ · فعالیت — بردار برحسب i و j و حل معادله‌ی برداری ... ۹۵

۱۷۵ صفحه ۸۰ · کار در کلاس — مختصات بردارهای ترکیبی ۹۶

۱۷۶ صفحه ۸۰ · تمرین — نوشتن با i و j و رسم بردارها ۹۶

۱۷۷ صفحه ۸۱ · تمرین — جهت بردار از روی علامت مختصات ... ۹۷

۱۷۸ صفحه ۸۱ · تمرین — روبات، جمع چند بردار، مسیر خودرو ... ۹۷

۱۷۹ صفحه ۸۲ · تمرین ترکیبی — بردار d، معادله‌ی برداری و بردار c ... ۹۸

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۵۷ صفحه ۷۰ فعالیت

۱ــ شخصی در نقطه‌ی A ایستاده است. مسیر حرکت او برای رسیدن به نقطه‌ی B در شکل مشخص شده است. این مسیر را با دو بردار نشان دهید. این شخص با چه برداری به طور مستقیم به نقطه‌ی B می‌رسد؟ آن را رسم کنید.

مسیر طی‌شده از دو پاره‌خط جهت‌دار تشکیل شده است؛ هر پاره‌خط را با یک بردار نشان می‌دهیم (مثلاً بردار اول از A تا نقطه‌ی میانی و بردار دوم از نقطه‌ی میانی تا B). برای رسیدن مستقیم، برداری از A به B رسم می‌کنیم؛ این بردار حاصل‌جمع دو بردار مسیر است.

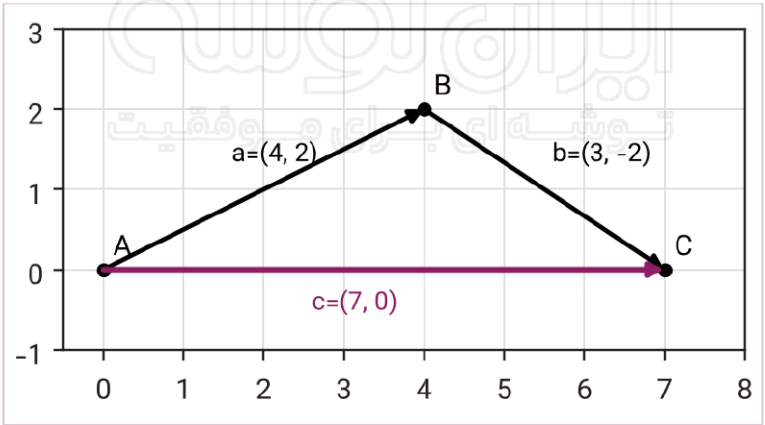
این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۵۸ صفحه ۷۰ فعالیت

۲ــ روباتی فقط به صورت افقی یا عمودی حرکت می‌کند. این روبات اکنون روی نقطه‌ی A است. با فرمان (4, 2) ابتدا ۴ واحد به سمت راست (افقی) و سپس ۲ واحد به سمت بالا (عمودی) حرکت می‌کند. نقطه‌ی جدید را B نام‌گذاری کنید. روبات ما با فرمان (3, −2) از B به نقطه‌ی C می‌رسد. با چه فرمانی به طور مستقیم از نقطه‌ی A به C می‌رسد؟

۳ــ نقطه‌ی A ابتدا با بردار انتقال a به نقطه‌ی B و سپس با بردار انتقال b به نقطه‌ی C منتقل می‌شود. نقطه‌ی A با چه برداری به طور مستقیم به نقطه‌ی C منتقل شده است؟ نام آن را بردار c بگذارید. آیا می‌توانیم بگوییم بردار c کار دو بردار انتقال a و b را انجام می‌دهد؟ به بردار c بردار برایند یا حاصل‌جمع می‌گویند.

۴ــ مختصات بردارهای a، b و c را بنویسید. آیا بردار c با جمع دو بردار a و b برابر است؟



۲) نقطه‌ی B نسبت به A چهار واحد راست و دو واحد بالاست. از B با فرمان (3, −2) سه واحد به راست و دو واحد به پایین می‌رویم و به C می‌رسیم. مستقیم از A به C: 7 = 3+4 واحد به راست و 0 = (−2)+2 واحد در راستای عمودی؛ پس فرمان (7, 0) است.

۳) بله؛ بردار c که از ابتدای a به انتهای b رسم می‌شود، همان نتیجه‌ی دو انتقال متوالی است و برایند a و b نامیده می‌شود: $c = a + b$.

۴) $a = (4, 2)$، $b = (3, -2)$ و $c = (7, 0)$. مختصات برایند، جمع مختصات دو بردار است: $(4, 2) + (3, -2) = c = (7, 0) = ((-2)+2, 4+3)$؛ پس $c = a+b$. برای جمع بردارها: ابتدای b را روی انتهای a می‌گذاریم و برداری از ابتدای a به انتهای b رسم می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۵۹ صفحه ۷۱ کار در کلاس

در فعالیت قبل دیدید که اگر دو بردار a و b به صورتی باشند که ابتدای b در انتهای a قرار گیرد، برای رسم حاصل‌جمع یا برایند این دو بردار می‌توانیم برداری از ابتدای بردار a به انتهای بردار b رسم کنیم. ابتدا مشخص کنید کدام بردار، حاصل‌جمع دو بردار دیگر است؛ سپس برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.

در هر شکل، برداری که از ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار می‌رود برایند است. اگر آن را c بنامیم: جمع برداری $a + b = c$ و جمع مختصاتی $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۶۰ صفحه ۷۱ فعالیت

۱ــ چهار بردار مساوی بردار a رسم کنید و مختصات همه‌ی بردارها را بنویسید.

۲ــ با توجه به اینکه بردارهای مساوی را می‌توان از نقطه‌های شروع مختلف رسم کرد، می‌خواهیم حاصل‌جمع بردارهای a و b را رسم کنیم. راه‌حل‌های این دو دانش‌آموز را توضیح دهید. (رضا: a + b = c، امیر: b + a = c)

۱) بردارهای مساوی هم‌جهت، هم‌راستا و هم‌اندازه‌اند؛ پس همه مختصات یکسانی با a دارند، هرچند ابتدای آنها در نقطه‌های مختلف باشد.

۲) رضا ابتدای b را روی انتهای a می‌گذارد و برایند را از ابتدای a تا انتهای b رسم می‌کند. امیر ابتدای a را روی انتهای b می‌گذارد و برایند را از ابتدای b تا انتهای a رسم می‌کند. هر دو به یک بردار c می‌رسند؛ یعنی $a + b = b + a$ (خاصیت جابه‌جایی جمع بردارها)؛ شکل حاصل یک متوازی‌الاضلاع است و برایند قطر آن است.

irantooshe.ir

۱۶۱ صفحه ۷۲ فعالیت

۳ــ دانش‌آموزان برای پیدا کردن جمع سه بردار، راه‌حل‌های زیر را ارائه کرده‌اند. هر کدام را توضیح دهید:

رضا: (a+b)+c؛ حمید: a+(b+c)؛ محمد: a+b+c؛ سعید: c+b+a.

۴ــ راه‌حل‌های دانش‌آموزان برای پیدا کردن جمع دو بردار a و b را مشاهده و مقایسه کنید. (مریم، زهرا، فاطمه)

- **رضا:** ابتدا a+b را رسم می‌کند و سپس c را به آن می‌افزاید.
- **حمید:** ابتدا b+c را رسم می‌کند و سپس آن را به a می‌افزاید.
- **محمد:** سه بردار را پشت هم قرار می‌دهد (ابتدای هر بردار روی انتهای بردار قبلی) و برایند را از ابتدای اول تا انتهای آخر رسم می‌کند.
- **سعید:** ترتیب را عوض می‌کند و c, b, a را پشت هم می‌گذارد.

هر چهار روش به یک بردار می‌رسند؛ پس جمع بردارها هم خاصیت جابه‌جایی و هم خاصیت شرکت‌پذیری دارد. در روش‌های مختلف جمع دو بردار (مثلثی: ابتدا به انتها؛ متوازی‌الاضلاع: از ابتدای مشترک) برایند یکسان است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۲ صفحه ۷۲ کار در کلاس

۱ــ حاصل‌جمع بردارهای زیر را رسم کنید.

۲ــ جمع دو بردار قرینه، برابر بردار صفر است. بردار صفر را به صورت 0 نشان می‌دهیم و مختصات آن (0, 0) است. حاصل‌جمع بردارهای a، b و c چیست؟ چرا؟

۱) بردارها را پشت‌سرهم می‌گذاریم و برایند را از ابتدای اولی تا انتهای آخری می‌کشیم.

۲) اگر سه بردار پشت‌سرهم یک مثلث بسته بسازند (انتهای بردار آخر به ابتدای بردار اول برسد)، جابه‌جایی کل صفر است؛ پس a+b+c = 0 و مختصات حاصل (0, 0) است. همچنین a + (−a) = 0.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۶۳ صفحه ۷۳ فعالیت

۱ــ دو بردار در راستاهای آبی‌رنگ رسم کنید که جمع آنها بردار a باشد. به این کار تجزیه‌ی بردار می‌گویند. چند پاسخ مختلف می‌توان به دست آورد؟ چرا؟

۲ــ مختصات دو بردار را که حاصل‌جمعشان بردار (3, 4) باشد، بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ‌های دوستانتان مقایسه کنید. به کمک هم، سه پاسخ مختلف دیگر بنویسید. فکر می‌کنید این مسئله چند پاسخ دارد؟

۱) فقط یک پاسخ؛ از ابتدای a خطی موازی با یکی از راستاها و از انتهای a خطی موازی با راستای دیگر می‌کشیم؛ نقطه‌ی برخورد این دو خط یکتاست و دو بردار تجزیه با آن مشخص می‌شوند.

۲) مثلاً (2, 3) + (1, 1)، (0, 4) + (3, 0)، (1, 2) + (2, 2)، (−2, −1) + (5, 5). هر دو بردار با مختصات (x, y) و (3−x, 4−y) جواب است؛ پس مسئله بی‌شمار پاسخ دارد.

۱۶۴ صفحه ۷۳ تمرین

۱ــ دو نفر در کنار رودخانه با دو طناب، قایقی را در خلاف جهت آب می‌کشند. الف) قایق به کدام سمت حرکت می‌کند؟ ب) اگر نیروی a بیشتر باشد، قایق به کدام طرف متمایل می‌شود؟

الف) قایق در جهت برایند دو نیرو، یعنی بین دو طناب و خلاف جهت آب، حرکت می‌کند. ب) اگر نیروی a بزرگ‌تر باشد، برایند به طرف a نزدیک‌تر می‌شود و قایق به سمت طنابی که با نیروی بیشتر کشیده می‌شود متمایل می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۵ صفحه ۷۳ تمرین

۲ــ در هر شکل یکی از بردارها، حاصل‌جمع بردارهای دیگر است. برای هر شکل، یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.

۳ــ در هر تساوی، x و y را به دست آورید.

۲) برایند، برداری است که از ابتدای اول به انتهای آخر می‌رود؛ جمع برداری: a+b = c و جمع مختصاتی: جمع طول‌ها و جمع عرض‌ها.

۳) در تساوی مختصاتی، طول‌ها را با هم و عرض‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم؛ مثلاً از (x, y) + (5, 2) = (6, 1) نتیجه می‌شود x = 6−5 = 1 و y = 1−2 = −1.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه

۱۶۶ صفحه ۷۴ فعالیت

۱ــ در اینجا بردار حرکت یک خودرو در جاده رسم شده است. اگر این خودرو سه برابر مسافت کنونی در جهت مخالف حرکت کند، بردار حرکت جدید را رسم کنید.

۲ــ دو نفر سعی می‌کنند جعبه‌ی روبه‌رو را بکشند و به جای دیگری ببرند. نیرویی که نفر اول وارد می‌کند با بردار a و نیروی نفر دوم با بردار b نمایش داده شده است. با توجه به شکل، نیروی نفر دوم چند برابر نیروی نفر اول است؟ چرا؟

۳ــ در فعالیت‌های ۱ و ۲، هنگام رسم بردارهای جدید در مورد راستا و جهت و اندازه‌ی آن، چه نکاتی را رعایت کردید؟

۴ــ در هر شکل، مختصات بردارهای a و b را بنویسید. رابطه‌ی دو بردار a و b را با یک تساوی برداری (b = 2a یا a = (1/2)b) و یک تساوی مختصاتی نشان دهید.

۱) بردار جدید $-3v$ است: هم‌راستا با بردار اول، در جهت مخالف، و ۳ برابر آن بلندتر.

۲) اگر طول بردار b مثلاً دو برابر طول a و هم‌جهت با آن باشد، نیروی نفر دوم ۲ برابر نیروی نفر اول است؛ یعنی $b = 2a$ (نسبت طول‌ها را از روی شکل می‌شماریم).

۳) هنگام ضرب عدد k در بردار: راستای بردار تغییر نمی‌کند؛ اگر $k > 0$ جهت همان است و اگر $k < 0$ جهت عوض می‌شود؛ اندازه‌ی بردار $|k|$ برابر می‌شود.

۴) اگر $b = k\cdot a$، مختصات b برابر k برابر مختصات a است: $(x_b, y_b) = k(x_a, y_a) = (kx_a, ky_a)$؛ مثلاً $a = (2, 1)$ و $b = 2a = (4, 2)$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۷ صفحه ۷۵ کار در کلاس

با توجه به بردارهای داده‌شده، بردار مورد نظر را رسم کنید: $b = 3a$، $y = -2x$، $b = (1/2)a$، $y = -(3/2)x$

برای رسم $k\cdot a$ طول بردار a را در $|k|$ ضرب می‌کنیم؛ اگر k مثبت باشد هم‌جهت و اگر منفی باشد در خلاف جهت a رسم می‌کنیم. مثلاً $3a$ هم‌جهت و ۳ برابر؛ $-2x$ خلاف جهت و ۲ برابر؛ $(1/2)a$ هم‌جهت و نصف؛ $-(3/2)x$ خلاف جهت و ۱٫۵ برابر.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۸ صفحه ۷۵ — فعالیت

۱ــ بردارهای a و b مفروض‌اند. بردار $c = 2a+3b$ را رسم کنید. از نقطه‌ی دلخواه O بردارهای 2a و 3b را رسم کنید؛ سپس بردار حاصل‌جمع را پیدا کنید.

۲ــ بردارهای خواسته‌شده را رسم کنید: $c = 2a-3b = 2a+(-3b)$، $z = 3x+2y$.

ابتدا 2a را با دو برابر کردن طول a و 3b را با سه برابر کردن b رسم می‌کنیم. سپس ابتدای 3b را روی انتهای 2a می‌گذاریم و برایند را از ابتدای 2a تا انتهای 3b می‌کشیم. در مختصات: اگر $a = (a_1, a_2)$ و $b = (b_1, b_2)$، آنگاه $2a+3b = (2a_1+3b_1, 2a_2+3b_2)$. برای $2a-3b$ ابتدا $-3b$ (سه برابر و خلاف جهت b) را رسم می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۶۹ صفحه ۷۶ — کار در کلاس

در هر شکل، بردار c را بر حسب بردارهای a و b بنویسید.

اگر برای رسیدن به انتهای c به اندازه‌ی m برابر a و n برابر b حرکت کنیم، $c = ma + nb$ است؛ m و n را از روی شکل می‌شماریم (جهت مخالف ⇒ عدد منفی).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۰ صفحه ۷۶ — تمرین

۱ــ با توجه به بردارهای a و b، بردارهای c و d را رسم کنید: $c = 3a+3b$، $c = 4a-2b$، $c = -3a-2b$؛ $d = -2(a+3b)$، $d = -a+4b$، $d = -a+5b$

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید (جمع و تفریق بردارهای مختصاتی).

۳ــ معادله‌های مختصاتی زیر را حل کنید.

۱) هر بردار را با ضرب عدد در بردار و سپس جمع (مثلثی) رسم می‌کنیم؛ مثلاً $3a+3b = 3(a+b)$ یعنی ۳ برابر برایند a و b.

۲، ۳) جمع و تفریق بردارها، و ضرب عدد در بردار، روی هر مختصات جداگانه انجام می‌شود: $(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1-x_2, y_1-y_2)$؛ در معادله‌ی مختصاتی طول‌ها را با هم و عرض‌ها را با هم مساوی قرار می‌دهیم و x و y را جداگانه به دست می‌آوریم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۷۱ صفحه ۷۷ تمرین

۴ــ در شکل روبه‌رو، نیروی وزن جعبه، که روی سطح شیب‌داری قرار گرفته، نشان داده شده است. این بردار را روی دو امتداد رسم‌شده تجزیه کنید.

۵ــ با توجه به بردارهای a و b، مختصات بردار c را به دست آورید: برای a = (−2, 1)، b = (2, 3) و a = (1, 0)، b = (0, 1)؛ c = a−2b، c = 2a+3b، c = −3a+4b

۶ــ با توجه به بردارهای a و b و c، بردار d را رسم کنید: d = a+b−c، d = 2a−3b+c

۷ــ بردارهای داده‌شده را روی امتدادهای رسم‌شده تجزیه کنید.

۴) از ابتدای بردار وزن دو خط موازی با دو امتداد (امتداد سطح شیب‌دار و امتداد عمود بر آن) رسم می‌کنیم و از انتهای بردار خطوطی موازی با همان امتدادها؛ دو بردار تجزیه از ابتدای وزن تا نقطه‌ی برخورد روی هر امتداد به دست می‌آیند.

۵) مختصات a و b از روی کتاب خوانده نمی‌شود؛ با فرض a = (−2, 1) و b = (2, 3) (که از متن استخراج‌شده به دست می‌آید) پاسخ‌ها چنین است:

- c = a−2b = (−2, 1) − (4, 6) = (−6, −5)
- c = 2a+3b = (−4, 2) + (6, 9) = (2, 11)
- c = −3a+4b = (6, −3) + (8, 12) = (14, 9)

با a = (1, 0) و b = (0, 1): a−2b = (1, −2)، 2a+3b = (2, 3)، −3a+4b = (−3, 4).

۶، ۷) مانند بخش‌های قبل، بردارها را با ضرب عدد و جمع (پشت‌سرهم قراردادن) رسم می‌کنیم؛ تجزیه با رسم خطوط موازی با امتدادها انجام می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

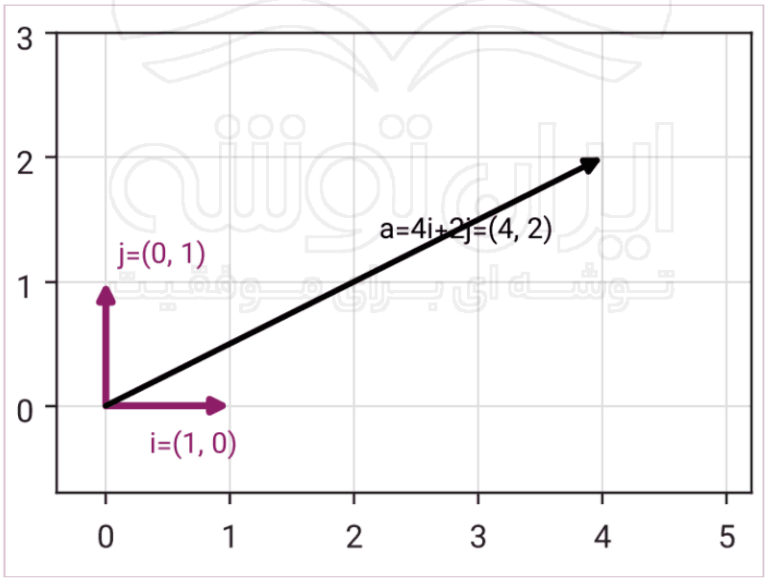
۱ــ برای اندازه‌گیری هر یک از مقدارهای زیر از چه واحدی استفاده می‌کنیم؟ طول، جرم، دما، زاویه، زمان.

۲ــ در محور زیر، واحد را نشان داده‌ایم. عددهای 2 و 1− را روی محور مشخص کنید.

۳ــ همان‌طور که ملاحظه کردید برای اندازه‌گیری و نمایش عددها روی محور به واحد نیاز داریم. برای نمایش بردار نیز به واحد نیازمندیم. این واحد باید از جنس بردار باشد. با توجه به اینکه بردار در صفحه‌ی مختصات با دو محور نمایش داده می‌شود به واحد روی هر دو محور نیاز داریم. در شکل روبه‌رو، بردارهای واحد روی هر دو محور مشخص شده‌اند: i و j. مختصات بردارهای واحد را بنویسید. بردار a = 4i+2j را رسم کنید. مختصات بردار a را بنویسید. مختصات بردار a را از رابطه‌ی a = 4i+2j = 4(1, 0)+2(0, 1) = (4, 2) به دست آورید.

کمیت	واحد
طول	متر
جرم	کیلوگرم
دما	درجه‌ی سلسیوس
زاویه	درجه
زمان	ثانیه

روی محور، عدد 2 دو واحد سمت راست صفر و عدد 1− یک واحد سمت چپ صفر است.



بردارهای واحد: i = (1, 0) (روی محور افقی) و j = (0, 1) (روی محور عمودی). بردار a = 4i+2j = 4(1, 0)+2(0, 1) = (4, 0)+(0, 2) = (4, 2)، یعنی ۴ واحد راست و ۲ واحد بالا.

۱۷۳ صفحه ۷۹ کار در کلاس

در هر قسمت، بردار داده‌شده را بر حسب i و j و سپس به صورت مختصاتی بنویسید.

اگر بردار m واحد افقی (راست مثبت) و n واحد عمودی (بالا مثبت) جابه‌جا شود، $v = m\cdot i + n\cdot j = (m, n)$ است؛ مثلاً ۳ واحد راست و ۲ واحد پایین: $3i-2j = (3, -2)$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۴ صفحه ۷۹ فعالیت

۱ــ طرف دیگر هر تساوی را مانند نمونه کامل کنید. (نمونه: $(2, 3) = 2i+3j$? $= (-1, 3)$، ? $= (1, -1)$، $(-2, -2)$? $=$، ? $= i+j$، ? $= 2i-j$، ? $= 2i-3j$

۲ــ معادله‌ی برداری زیر را دو دانش‌آموز حل کرده‌اند. مراحل راه‌حل آنها را با هم مقایسه کنید. (حمید و سعید)

۳ــ معادله‌های زیر را با روش مورد نظر خود حل کنید.

- $(-1, 3) = -i+3j$
- $(1, -1) = i-j$
- $(-2, -2) = -2i-2j$
- $i+j = (1, 1)$
- $2i-j = (2, -1)$
- $2i-3j = (2, -3)$

۲) حمید معادله را با نماد بردارهای واحد حل می‌کند: جمله‌ها را بر حسب i و j می‌نویسد، جمله‌های شامل x را در یک طرف جمع می‌کند و در نهایت به $x = -4i$ می‌رسد. سعید همان معادله را با مختصات حل می‌کند: بردارها را به صورت ستونی می‌نویسد، مختصات را جداگانه جمع و تفریق می‌کند و به $x = (-4, 0)$ می‌رسد. هر دو پاسخ یکی است ($(-4, 0) = -4i$)؛ روش سعید برای محاسبه آسان‌تر است.

۳) هر معادله را مانند روش سعید حل می‌کنیم: طول‌ها را جداگانه و عرض‌ها را جداگانه برابر می‌کنیم و x را پیدا می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

irantooshe.ir

۱۷۵ صفحه ۸۰ کار در کلاس

اگر $a = 3i-2j$ و $b = i+2j$ باشد، مختصات بردارهای x و $y = -3a+4b$ را به دست آورید.

$a = (3, -2)$ و $b = (1, 2)$ (با این برداشت از شکل نوشتار).

$y = -3a+4b = -3(3, -2)+4(1, 2) = (-9, 6)+(4, 8) = (-5, 14)$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۶ صفحه ۸۰ تمرین

۱ــ طرف دیگر تساوی‌ها را بنویسید. $a = (3, 7)$، $b = -2i+5j$، $c = (3, -2)$، $d = (-2, -4)$، $e = (-5, 0)$، $f = -2j$

۲ــ دو محور عمود بر هم رسم کنید و بردارهای واحد مختصات را روی آنها مشخص کنید. آنگاه بردارهای زیر را روی آن دستگاه مختصات رسم کنید و هر بردار را بر حسب بردارهای واحد i و j بنویسید. $a = (2, 1)$، $b = (-2, 3)$، $c = (5, -1)$، $d = (-6, -4)$

۳ــ با توجه به شکل زیر، مختصات بردار c را با دو روش زیر پیدا کنید. الف) رسم شکل و نوشتن مختصات c از روی شکل. ب) پیدا کردن مختصات a و b و قرار دادن آنها در تساوی $c = 3a+2b$. ویژگی‌های هر روش را بیان کنید. کدام روش برای رایانه‌ای شدن مناسب‌تر است؟ چرا؟

- $a = (3, 7) = 3i+7j$
- $b = -2i+5j = (-2, 5)$
- $c = (3, -2) = 3i-2j$
- $d = (-2, -4) = -2i-4j$
- $e = (-5, 0) = -5i$
- $f = -2j = (0, -2)$
- $a = (2, 1) = 2i+j$
- $b = (-2, 3) = -2i+3j$
- $c = (5, -1) = 5i-j$
- $d = (-6, -4) = -6i-4j$

۳) روش الف (شکل) شهودی است ولی دقت کمی دارد و برای بردارهای بزرگ یا پیچیده زمان‌بر است؛ روش ب (محاسبه‌ی مختصاتی) دقیق است و فقط به جمع و ضرب عددها نیاز دارد. روش ب برای رایانه مناسب‌تر است، چون رایانه شکل را «نمی‌بیند» ولی می‌تواند مختصات را جمع و در عدد ضرب کند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۷۷ صفحه ۸۱ تمرین

۴ــ با توجه به علامت طول و عرض بردار، شکل تقریبی آن را مانند نمونه رسم کنید. (طول: −، +، −، +؛ عرض: −، −، +، +)

۵ــ اگر a = 2i−3j و b برداری با مختصات داده‌شده در کتاب باشد، بردار x را از معادله‌ی برداری داده‌شده پیدا کنید.

علامت طول	علامت عرض	جهت تقریبی بردار
منفی (−)	منفی (−)	پایین و چپ
مثبت (+)	منفی (−)	پایین و راست
منفی (−)	مثبت (+)	بالا و چپ
مثبت (+)	مثبت (+)	بالا و راست

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۸ صفحه ۸۱ تمرین

۶ــ یک روبات برنامه‌ریزی‌شده به صورت زیر از مبدأ مختصات حرکت می‌کند. با مشاهده‌ی سه حرکت اول این روبات، الگویی برای حرکت آن کشف کنید و توضیح دهید. روبات پس از حرکت پنجم به کدام نقطه می‌رسد؟

۷ــ حمیده با خود فکر می‌کرد که اگر چند بردار با هم جمع شوند، بردار حاصل‌جمع از همه‌ی آنها بزرگ‌تر است. آیا او درست فکر کرده است؟ با کشیدن شکل توضیح دهید.

۸ــ در صفحه‌ی شطرنجی زیر، یک خودرو با نقطه‌ی A مشخص شده است. این خودرو مسیری را طی کرده است تا به نقطه‌ی B برسد؛ در کل به اندازه‌ی چند واحد حرکت کرده است؟ خودرو از نقطه‌ی A به B در راستای عمودی چند واحد جابه‌جا شده است؟

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۶) برای کشف الگو، مختصات حرکت‌های متوالی را می‌نویسیم و تفاوت‌ها را بررسی می‌کنیم؛ نقطه‌ی بعد از حرکت پنجم با ادامه‌ی همان الگو و جمع مختصات حرکت‌ها به دست می‌آید.

۷) خیر؛ حاصل‌جمع می‌تواند کوچک‌تر از بردارها باشد. مثلاً دو بردار هم‌اندازه و در خلاف جهت هم، مانند a و a−، برایند 0 (صفر) دارند؛ یا دو بردار با زاویه‌ی بزرگ بین آنها (در شکل متوازی‌الاضلاع) برایندی کوتاه‌تر از یکی از آنها می‌دهند.

۸) مجموع جابه‌جایی‌های مسیر را از روی خانه‌های شطرنجی می‌شماریم؛ جابه‌جایی عمودی A به B فقط اختلاف عرض دو نقطه است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۷۹ صفحه ۸۲ تمرین ترکیبی

۱ــ با توجه به بردارهای a و b و c، بردار d = 2a−3b+c را رسم کنید. (a = (2, 1)، b = (−2, 3)، c = (5, −1))

۲ــ با توجه به بردارهای a و b، بردار x را از معادله‌ی برداری داده‌شده در کتاب پیدا کنید.

۳ــ با توجه به شکل، مختصات بردار c = a − 2b را پیدا کنید.

۱) با a = (2, 1)، b = (−2, 3) و c = (5, −1):
d = 2a−3b+c = (4, 2) − (−6, 9) + (5, −1) = (4+6+5, 2−9−1) = (15, −8)؛ آن را با ضرب عدد در بردار و جمع‌کردن (پشت‌سرهم قراردادن) رسم می‌کنیم.

۲) معادله‌ی برداری را مانند معادله‌ی عددی حل می‌کنیم: جمله‌های شامل x را در یک طرف و بقیه را در طرف دیگر قرار می‌دهیم، بردارها را به صورت مختصات می‌نویسیم و طول‌ها و عرض‌ها را جداگانه جمع و تفریق می‌کنیم؛ در پایان اگر ضریب x عددی مثل k باشد، مختصات را بر k تقسیم می‌کنیم.

۳) مختصات a و b را از شکل می‌خوانیم و c = a−2b را مختصات به مختصات حساب می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی هشتم - فصل ششم

مثلث

فهرست

۱۸۰ صفحه ۸۴ · فعالیت — مساحت مربع‌های روی ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه ... ۱۰۱

۱۸۱ صفحه ۸۵ · فعالیت — نمایش رابطه‌ی فیثاغورس با قطعه‌های کاغذی ... ۱۰۲

۱۸۲ صفحه ۸۵ · خواندنی — اثبات نیریزی برای رابطه‌ی فیثاغورس ... ۱۰۲

۱۸۳ صفحه ۸۶ · کار در کلاس — بررسی رابطه‌ی فیثاغورس و یافتن x، y و z ... ۱۰۲

۱۸۴ صفحه ۸۶ · فعالیت — پیدا کردن ضلع مجهول و تساوی‌های جبری ... ۱۰۳

۱۸۵ صفحه ۸۷ · کار در کلاس — ارتفاع مخروط و رسم پاره‌خط به طول رادیکال ۱۰ ... ۱۰۳

۱۸۶ صفحه ۸۷ · تمرین — محیط مثلث و تشخیص مثلث قائم‌الزاویه ... ۱۰۴

۱۸۷ صفحه ۸۷ · تمرین — طول مسیر بین طبقه‌های توقف‌گاه ... ۱۰۵

۱۸۸ صفحه ۸۸ · فعالیت — شکل‌های هم‌نهشت و تبدیل‌ها ... ۱۰۵

۱۸۹ صفحه ۸۹ · کار در کلاس — دوران، انتقال و اجزای متناظر ... ۱۰۶

۱۹۰ صفحه ۹۰ · فعالیت — اندازه‌ها در شکل‌های هم‌نهشت و تشکیل معادله ... ۱۰۷

۱۹۱ صفحه ۹۱ · تمرین — مثلث‌های هم‌نهشت با مثلث الف ... ۱۰۸

۱۹۲ صفحه ۹۱ · تمرین — هم‌نهشتی در خرپای پل ۱۰۸

۱۹۳ صفحه ۹۱ · تمرین — یافتن زاویه‌های مجهول ۱۰۸

۱۹۴ صفحه ۹۲ · فعالیت — ساختن مثلث با سه زاویه‌ی داده شده ... ۱۰۹

۱۹۵ صفحه ۹۲ · کار در کلاس — زاویه‌های مساوی در دو مثلث ... ۱۰۹

۱۹۶ صفحه ۹۲ · فعالیت — ساختن مثلث با سه ضلع داده شده (ض ض ض) ... ۱۱۰

۱۹۷ صفحه ۹۳ · کار در کلاس — میانه‌ی مثلث متساوی‌الساقین ... ۱۱۰

۱۹۸ صفحه ۹۴ · فعالیت — ساختن مثلث با دو ضلع و زاویه‌ی بین (ض ز ض) ... ۱۱۱

۱۹۹ صفحه ۹۴ · کار در کلاس — نیمساز زاویه‌ی رأس مثلث متساوی‌الساقین ... ۱۱۱

۲۰۰ صفحه ۹۴ · فعالیت — ساختن مثلث با دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) ... ۱۱۱

۲۰۱ صفحه ۹۵ · کار در کلاس — مثلث با دو زاویه‌ی برابر ۱۱۲

۲۰۲ صفحه ۹۵ · تمرین — تشخیص حالت هم‌نهشتی دو مثلث ... ۱۱۲

۲۰۳ صفحه ۹۵ · تمرین — اجزای مساوی و حالت هم‌نهشتی ... ۱۱۲

۲۰۴ صفحه ۹۵ · تمرین — مثلث با دو زاویه و یک ضلع غیربین ... ۱۱۳

۲۰۵ صفحه ۹۶ · فعالیت — هم‌نهشتی با وتر و یک ضلع (و ض) ... ۱۱۳

۲۰۶ صفحه ۹۶ · کار در کلاس — ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین و جفت مثلث‌های هم‌نهشت ... ۱۱۴

۲۰۷ صفحه ۹۷ · فعالیت — هم‌نهشتی با وتر و یک زاویه‌ی تند (و ز) ... ۱۱۴

۲۰۸ صفحه ۹۷ · کار در کلاس — کاربرد حالت‌های (و ز) و (و ض) ... ۱۱۵

۲۰۹ صفحه ۹۸ · فعالیت — نقاط روی عمودمنصف و نیمساز ... ۱۱۵

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۱۰ صفحه ۹۹ · تمرین — تشخیص هم‌نهشتی با شکل‌های داده شده ... ۱۱۶

۲۱۱ صفحه ۹۹ · تمرین — اجزای مساوی و حالت هم‌نهشتی در دایره ... ۱۱۶

۲۱۲ صفحه ۹۹ · تمرین — تبدیل منطبق‌کننده‌ی مثلث‌ها ۱۱۶

۲۱۳ صفحه ۱۰۰ · تمرین ترکیبی — طول سطح شیب‌دار ۱۱۷

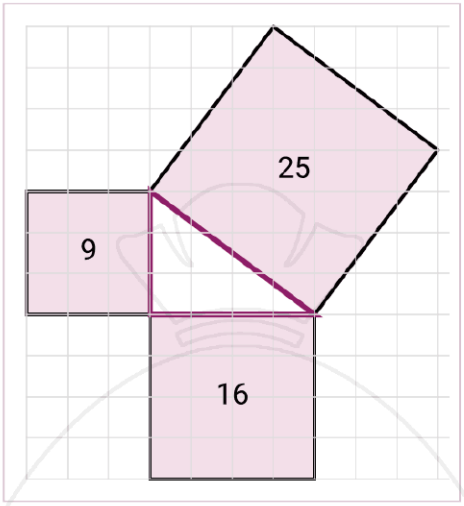
۲۱۴ صفحه ۱۰۰ · تمرین ترکیبی — الگوی مثلث‌های هم‌نهشت و محیط ... ۱۱۷

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸۰ صفحه ۸۴ فعالیت

۱ــ روی هر ضلع مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی شبکه‌ی شطرنجی یک مربع رسم شده است. با شمارش مربع‌های شطرنجی، مساحت هر مربع را به دست آورید و جدول را کامل کنید. چه ارتباطی بین عددهای هر سطر می‌بینید؟

در سطر (الف) مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های ۳ و ۴ و وتر ۵ است (مربع‌ها: ۲۵، ۹ و ۱۶).



	a^2 (وتر)	b^2	c^2
الف	25	9	16
ب	13	4	9
ج	10	1	9
د	8	4	4

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ارتباط: در هر سطر، مساحت مربع روی وتر با مجموع مساحت‌های دو مربع دیگر برابر است: 16 + 9 = 25، 13 = 4 + 9، 10 = 1 + 9، 4 + 4 = 8. یعنی $a^2 = b^2 + c^2$.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۱۸۱ صفحه ۸۵ فعالیت

۲ــ هر یک از شکل‌ها روشی برای نمایش رابطه‌ی مساحت مربع‌های روی ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه است. روی کاغذ یک مثلث قائم‌الزاویه رسم کنید و روی هر ضلع آن مربعی بسازید؛ سپس مربع‌های دو ضلع کوچک را به قطعه‌های کاغذی تقسیم کنید که مربع روی وتر را کاملاً بپوشانند.

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع‌های ۳ و ۴ و ۵ سانتی‌متر رسم می‌کنیم و روی هر ضلع مربع می‌سازیم. مربع ۳×۳ (مساحت ۹) و مربع ۴×۴ (مساحت ۱۶) را به قطعه‌های کوچک (مثلاً مربع‌های واحد یا چند قطعه‌ی مثلثی و چهارضلعی) برش می‌دهیم.

نتیجه: قطعه‌های این دو مربع دقیقاً و بدون هم‌پوشانی، مربع ۵×۵ (مساحت ۲۵) روی وتر را می‌پوشانند. پس مجموع مساحت دو مربع کوچک با مساحت مربع وتر برابر است: $9 + 16 = 25$، یعنی $a^2 = b^2 + c^2$.

۱۸۲ صفحه ۸۵ خواندنی

در شکل، چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی هم‌نهشت دیده می‌شود. سمت راست مربع‌های روی دو ضلع زاویه‌ی قائمه و سمت چپ مربع روی وتر رنگ شده است. چرا مساحت ناحیه‌ی رنگی در این دو شکل برابر است؟

هر دو شکل مربعی بزرگ به ضلع $a + b$ هستند که مساحت یکسان دارند و در هر دو، چهار مثلث قائم‌الزاویه‌ی هم‌نهشت (هر کدام به مساحت $ab/2$) از آن جدا شده است.

پس مساحت باقی‌مانده نیز در دو شکل برابر است: در یک شکل مجموع دو مربع $a^2 + b^2$ و در شکل دیگر مربع روی وتر c^2 است. بنابراین $c^2 = a^2 + b^2$.

۱۸۳ صفحه ۸۶ کار در کلاس

۱ــ درستی رابطه‌ی فیثاغورس را در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی روبه‌رو بررسی کنید.

۲ــ به ترتیب طول x، y و z را به دست آورید.

۱)

- مثلث با ضلع‌های ۵ و ۱۲ و وتر ۱۳: $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$
- مثلث با ضلع‌های ۱ و ۱ و وتر $\sqrt{2}$: $1^2 + 1^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$
- مثلث با ضلع‌های ۱ و $\sqrt{2}$ و وتر $\sqrt{3}$: $1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

- $y^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow y = 5$ متر
- $x^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow x = 12$ متر
- $z^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow z = 4$ متر

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۸۴ صفحه ۸۶ **فعالیت**

۱ــ در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه‌ی دو ضلع داده شده است. اندازه‌ی ضلع مجهول را مانند نمونه پیدا کنید.

۲ــ تساوی‌های جبری زیر را کامل کنید: $a^2 = ___ + ___$، $b^2 = ___ - ___$، $c^2 = ___ - ___$

۱)

اگر وتر معلوم باشد، مجذور ضلع مجهول برابر است با تفاضل مجذور وتر و مجذور ضلع معلوم؛ اگر دو ضلع قائم معلوم باشد، مجذور وتر برابر مجموع مجذورهاست. مثلاً:

- ضلع‌های ۶ و ۸: $x^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow x = 10$
- وتر ۱۷ و یک ضلع ۸: $x^2 = 289 - 64 = 225 \Rightarrow x = 15$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

اگر a وتر باشد: $a^2 = b^2 + c^2$ و از آن $b^2 = a^2 - c^2$ و $c^2 = a^2 - b^2$ نتیجه می‌شود.

---

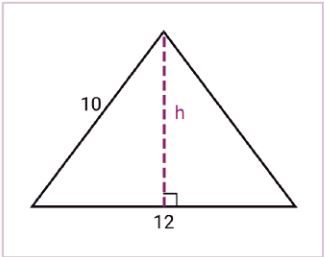
۱۸۵ صفحه ۸۷ **کار در کلاس**

۱ــ علی با قسمتی از دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر، مخروطی به قطر قاعده‌ی ۱۲ سانتی‌متر ساخته است. ارتفاع این مخروط چقدر است؟

۲ــ راه حل هر یک از سه دانش‌آموز (مهسا، سیما و زهرا) را توضیح دهید. کدام روش هندسی و کدام حسابی است؟

۱)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت



شعاع دایره، همان یال (مولد) مخروط است: ۱۰ سانتی‌متر. شعاع قاعده 6 = 2 ÷ 12 است. ارتفاع، ضلع قائم مثلثی با وتر ۱۰ و ضلع ۶ است: $h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow h = 8$ سانتی‌متر.

۲)

- مهسا: با ماشین حساب مقدار تقریبی $\sqrt{10} \approx 3.16$ را پیدا می‌کند و با خط‌کش پاره‌خطی به طول تقریبی ۳٫۲ سانتی‌متر می‌کشد؛ روش حسابی.
- سیما: مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۳ می‌کشد؛ چون $1^2 + 3^2 = 10$، وتر آن $\sqrt{10}$ است؛ روش هندسی (دقیق).
- زهرا: با ساختن پی‌درپی مثلث‌های قائم‌الزاویه (ضلع قائم دوم همیشه ۱ و وتر مثلث قبل)، وترها $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{4}$ و ... ساخته می‌شوند تا به $\sqrt{10}$ برسد؛ روش هندسی.

۱۸۶ صفحه ۸۷ تمرین

۱ــ محیط مثلث ABC را حساب کنید.

۲ــ کدام مثلث قائم‌الزاویه است؟

۱)

AD ارتفاع مثلث است (BD = ۵، AD = ۱۲ و AC = ۱۵ سانتی‌متر). $AB^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow AB = 13$ و $DC^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow DC = 9$، پس BC = 5 + 9 = 14.

محیط: 13 + 14 + 15 = 42 سانتی‌متر.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

اگر مجذور بزرگ‌ترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد، مثلث قائم‌الزاویه است. مثلث با ضلع‌های ۶، ۸ و ۱۰: $10^2 = 100 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow$ قائم‌الزاویه است. مثلث با ضلع‌های ۶، ۶ و ۷: $7^2 = 49 \neq 72 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow$ قائم‌الزاویه نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۸۷ صفحه ۸۷ تمرین

۳ــ شکل نمایی از یک توقف‌گاه طبقاتی را نشان می‌دهد. طول مسیری که هر طبقه را به طبقه‌ی بعدی می‌رساند، چقدر است؟

مسیر شیب‌دار وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع‌های آن اختلاف ارتفاع دو طبقه (۳ متر) و طول افقی (۶ متر) است:

$x^2 = 3^2 + 6^2 = 45 \Rightarrow x = \sqrt{45} \approx 6.7$ متر.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۸ صفحه ۸۸ فعالیت

۱ــ مثلث‌های الف، ب، ج و د از انتقال، تقارن یا دوران مثلث قرمز به دست آمده‌اند. مشخص کنید از کدام تبدیل استفاده شده و ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی را علامت‌گذاری کنید.

۲ــ دو مثلث ABC و GHF هم‌نهشت‌اند. با توجه به علامت‌ها، تساوی ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر را کامل کنید.

۳ــ راه دیگری برای منطبق کردن مثلث XYZ بر مثلث LMN پیدا کنید.

۱)

مثلث‌ها را به ترتیب تقارن محوری، انتقال، دوران و (دوباره) دوران یا تقارن می‌یابیم؛ در هر مثلث، ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر با مثلث قرمز را با علامت‌های یکسان (مثلاً یک، دو و سه خط کوچک روی ضلع‌ها و کمان‌های یکسان روی زاویه‌ها) نشان می‌دهیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

چون $\triangle GHF \cong \triangle ABC$، رأس‌ها به ترتیب متناظرند (A با G، B با H و C با F):

- $\hat{A} = \hat{G}$ ،$\hat{B} = \hat{H}$ ،$\hat{C} = \hat{F}$
- $BC = HF$ ،$AB = GH$ ،$AC = GF$

۳)

مثلاً می‌توان ابتدا مثلث XYZ را نسبت به یک خط (تقارن محوری) قرینه کرد و سپس آن را با یک انتقال بر مثلث LMN منطبق کرد. راه‌های درست دیگری هم وجود دارد (مثلاً یک انتقال و سپس یک دوران حول یک رأس).

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۸۹ صفحه ۸۹ کار در کلاس

۱ــ تصویر ذوزنقه‌ی ABCD را پس از دوران ۱۸۰° حول نقطه‌ی D رسم کنید و آن را $A_1B_1C_1D_1$ بنامید. سپس آن را با بردار داده شده انتقال دهید و شکل جدید را نام‌گذاری کنید. عبارت هم‌نهشتی را کامل کنید.

۲ــ با توجه به هم‌نهشتی شکل‌ها در هر قسمت، در صورت امکان اندازه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر را پیدا کنید.

۳ــ دیواره‌های کنار پل از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی هم‌نهشت ساخته شده‌اند. زاویه‌های مساوی را مشخص کنید و اندازه‌ی زاویه‌های یکی از مثلث‌ها را بنویسید.

۱)

دوران و انتقال، اندازه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهند، پس شکل‌های حاصل با ABCD هم‌نهشت‌اند. اگر شکل دوم را $A_2B_2C_2D_2$ بنامیم:

$$ABCD \cong A_1B_1C_1D_1 \cong A_2B_2C_2D_2$$

۲)

در هم‌نهشتی $GHIJ \cong KLMN$ به ترتیب رأس‌ها متناظرند: $GH = KL$، $HI = LM$، $IJ = MN$، $JG = NK$ و $\hat{G} = \hat{K}$، $\hat{H} = \hat{L}$، $\hat{I} = \hat{M}$، $\hat{J} = \hat{N}$. به همین ترتیب در $ABC \cong DEF$: $AB = DE$، $BC = EF$، $AC = DF$ و $\hat{A} = \hat{D}$، $\hat{B} = \hat{E}$، $\hat{C} = \hat{F}$. اندازه‌ی هر ضلع یا زاویه‌ی مجهول برابر اندازه‌ی ضلع یا زاویه‌ی متناظر معلوم آن است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳)

در هر مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه ۹۰° است و دو زاویه‌ی تند مجموعاً ۹۰° هستند. چون مثلث‌ها هم‌نهشت‌اند، زاویه‌های متناظر مساوی‌اند. مثلاً اگر یک زاویه‌ی تند ۵۰° باشد، دیگری $90° - 50° = 40°$ است و در همه‌ی مثلث‌ها همین سه زاویه (۹۰°، ۵۰° و ۴۰°) دیده می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹۰ صفحه ۹۰ فعالیت

۱ــ در شکل، $\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$ و برخی ضلع‌ها و زاویه‌ها نوشته شده است. اندازه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر را به دست آورید.

۲ــ چهارضلعی DEFG را نسبت به خطی افقی قرینه کرده‌ایم و چهارضلعی HIJK به دست آمده است. اندازه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌های دیگر را به دست آورید.

۳ــ مثلث ABC را می‌توان با انتقال بر مثلث $A'B'C$ منطبق کرد. مانند نمونه با تشکیل و حل معادله، اندازه‌ی ضلع‌های مثلث‌ها را به دست آورید.

۱)

اجزای متناظر در دو مثلث هم‌نهشت مساوی‌اند؛ هر ضلع یا زاویه‌ی مجهول را برابر متناظرش بنویسید. همچنین زاویه‌ی سوم هر مثلث از رابطه‌ی مجموع زاویه‌ها به دست می‌آید؛ مثلاً اگر دو زاویه 37° و 117° باشند، سومی $180^\circ - 37^\circ - 117^\circ = 26^\circ$ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

قرینه‌سازی اندازه‌ها را حفظ می‌کند: $DE = HI$، $EF = IJ$، $FG = JK$، $GD = KH$ و زاویه‌های $\hat{D} = \hat{H}$، $\hat{E} = \hat{I}$، $\hat{F} = \hat{J}$، $\hat{G} = \hat{K}$. هر مقدار مجهول برابر مقدار متناظر معلوم است. این تساوی‌ها همه از هم‌نهشتی اجزای متناظر نتیجه می‌شوند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳)

معادله	حل	اندازه‌ها
$3x = x + 2$	$x = 1$	$AB = A'B' = 3$
$y + 3 = 5y - 5$	$4y = 8 \Rightarrow y = 2$	$BC = B'C' = 5$
$AC = A'C'$		$z = 7$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۱۹۱ صفحه ۹۱ تمرین

۱ــ زاویه‌های مساوی را با رنگ‌های یکسان مشخص کرده‌ایم. کدام مثلث‌ها با مثلث الف هم‌نهشت‌اند؟ مانند نمونه مشخص کنید با چه تبدیل یا تبدیل‌هایی می‌توان مثلث الف را بر مثلث‌های هم‌نهشت با آن منطبق کرد. چهار مورد دیگر بنویسید.

مثلث‌هایی هم‌نهشت با مثلث الف هستند که اندازه‌ی ضلع‌هایشان با آن برابر باشد (فقط جابه‌جایی، دوران یا قرینه شده باشند). چهار مورد نمونه:

- الف ← ب: انتقال
- الف ← ج: تقارن محوری
- الف ← د: دوران 180° (حول یک نقطه)
- الف ← ه: تقارن و سپس انتقال

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹۲ صفحه ۹۱ تمرین

۲ــ سازه‌های مثلثی پل را می‌دانیم $\triangle ABC \cong \triangle BCD$. الف) کدام زاویه‌ی مثلث ABC روبه‌روی ضلع BC است؟ ب) کدام زاویه‌ی مثلث BCD روبه‌روی ضلع BC است؟ ج) اگر مثلث ABC را بر مثلث BCD منطبق کنیم، کدام زاویه با زاویه‌ی A متناظر است؟

- الف) زاویه‌ی $\hat{A}$
- ب) زاویه‌ی $\hat{D}$
- ج) در هم‌نهشتی $ABC \cong BCD$ رأس A با رأس B متناظر است، پس زاویه‌ی $\hat{B}$ با $\hat{A}$ متناظر است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹۳ صفحه ۹۱ تمرین

۳ــ زاویه‌های مجهول را بیابید. الف) مثلث HIG حاصل دوران ۹۰ درجه‌ی مثلث EFG حول نقطه‌ی G است. ب) چهارضلعی KLMN حاصل تقارن چهارضلعی ABCD نسبت به خطی عمودی است.

الف)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

زاویه‌های مثلث EFG برابر ۴۰°، 2x − 20 و x + 25 است: $x = 45 \Rightarrow 3x = 135 \Rightarrow 40 + 2x - 20 + x + 25 = 180$.

پس زاویه‌ها ۴۰°، ۷۰° و ۷۰° هستند و زاویه‌های مثلث HIG (هم‌نهشت با آن) نیز همین‌اند؛ پس $y = 70^\circ$ و $k = 40^\circ$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ب)

زاویه‌های متناظر مساوی‌اند: $y = 40 \Rightarrow 3y = 5y - 80$، پس $3y = 120^\circ$. مجموع زاویه‌های چهارضلعی ۳۶۰° است: $z = 110^\circ \Rightarrow 85 + 45 + 120 + z = 360$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۱۹۴ صفحه ۹۲ فعالیت

فکر می‌کنید مثلثی که آرمان و سامان با زاویه‌های برابر ساخته‌اند با مثلث اولیه هم‌نهشت است؟ آیا آنها می‌توانند مثلثی بسازند که با مثلث اولیه هم‌نهشت باشد؟

نه، لزوماً هم‌نهشت نیست. با سه زاویه‌ی معلوم می‌توان مثلث‌هایی با اندازه‌های متفاوت (کوچک‌تر یا بزرگ‌تر) ساخت که زاویه‌هایشان برابر است، ولی ضلع‌هایشان یکسان نیست.

بله، ممکن است اتفاقاً مثلثی هم‌اندازه با مثلث اولیه بسازند، اما برابری سه زاویه برای هم‌نهشتی کافی نیست.

۱۹۵ صفحه ۹۲ کار در کلاس

۱ــ زاویه‌های مساوی را در هر قسمت علامت‌گذاری کنید. (دو مثلث متساوی‌الاضلاع، دو مثلث قائم‌الزاویه)

۲ــ شکل‌های سؤال قبل را نام‌گذاری کنید و تساوی زاویه‌ها را بنویسید.

در مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC و DEF همه‌ی زاویه‌ها ۶۰° است: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \hat{F} = 60^\circ$.

در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و DEF (قائمه در A و D) زاویه‌های قائمه برابرند و زاویه‌های تند نیز نظیر به نظیر برابرند: $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$، $\hat{B} = \hat{E}$، $\hat{C} = \hat{F}$.

هر دو جفت مثلث زاویه‌های مساوی دارند، ولی لزوماً هم‌اندازه نیستند، پس هم‌نهشت نیستند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۱۹۶ صفحه ۹۲ **فعالیت**

۱ــ معلم مثلثی رسم کرد و سه ضلع آن را روی سه برگ کاغذ پوستی کشید. از بچه‌ها خواست مثلثی بسازند که ضلع‌هایش با این سه ضلع برابر باشد. شما هم این فعالیت را انجام دهید و درباره‌ی آن فکر کنید.

۲ــ آرمان گفت: «اگر ضلع‌های دو شکل مساوی باشد حتماً هم‌نهشت‌اند؟» پاسخ شما چیست؟

۱)

یک ضلع را رسم می‌کنیم؛ با پرگار از دو سر آن کمان‌هایی به شعاع دو ضلع دیگر می‌زنیم. محل برخورد کمان‌ها رأس سوم است. هر مثلثی که بدین ترتیب ساخته شود با مثلث اولیه هم‌نهشت است؛ پس اگر سه ضلع دو مثلث نظیر به نظیر برابر باشند، دو مثلث هم‌نهشت‌اند (حالت ض ض ض).

۲)

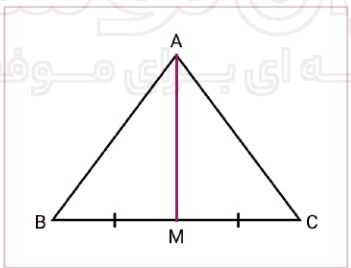
برای مثلث درست است، اما برای شکل‌های دیگر نه. مثلاً یک مربع و یک لوزی غیرمربع که چهار ضلع برابر دارند، هم‌نهشت نیستند، چون زاویه‌هایشان متفاوت است.

۱۹۷ صفحه ۹۳ **کار در کلاس**

۱ــ مثلث ABC متساوی‌الساقین است و M وسط BC است. عبارت‌ها را کامل کنید و نشان دهید ضلع‌های دو مثلث ایجاد شده برابرند. هم‌نهشتی را با یک عبارت نشان دهید.

۲ــ الف) لوزی را نام‌گذاری و یکی از قطرهایش را رسم کنید. ب) دلیل تساوی ضلع‌های دو مثلث ایجاد شده را بنویسید. ج) زاویه‌های مساوی را مشخص کنید.

۱)



- AB = AC چون ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC هستند.
- CM = BM چون M وسط BC است.
- AM هم ضلع مشترک دو مثلث است.

پس △ABM ≅ △ACM (حالت ض ض ض).

۲)

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

لوزی ABCD را رسم می‌کنیم و قطر AC را می‌کشیم. AB = AD و CB = CD چون ضلع‌های لوزی با هم برابرند و AC ضلع مشترک است؛ پس △ADC ≅ △ABC (ض ض ض). در نتیجه $\hat{B} = \hat{D}$، ∠BAC = ∠DAC و ∠BCA = ∠DCA.

۱۹۸ صفحه ۹۴ **فعالیت**

مثلثی رسم کنید و دو ضلع آن و زاویه‌ی بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید. مثلثی بسازید که دو ضلع آن با این دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها با زاویه‌ی رسم شده برابر باشد. آیا این مثلث با مثلث اولیه هم‌نهشت است؟ آیا می‌توانید مثلثی بسازید که هم‌نهشت نباشد؟

بله، مثلث ساخته شده با مثلث اولیه هم‌نهشت است؛ چون دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها معلوم است، رأس سوم جای دیگری نمی‌تواند باشد. با این شرایط نمی‌توان مثلثی ساخت که هم‌نهشت نباشد. پس اگر دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها در دو مثلث نظیر به نظیر برابر باشد، دو مثلث هم‌نهشت‌اند (حالت ض ز ض).

۱۹۹ صفحه ۹۴ **کار در کلاس**

در مثلث متساوی‌الساقین ABC نیمساز زاویه‌ی A را رسم کرده‌ایم. عبارت‌ها را کامل کنید و نشان دهید دو مثلث ABD و ADC هم‌نهشت‌اند و دو زاویه‌ی مجاور قاعده با هم برابرند.

- AC = AB چون مثلث متساوی‌الساقین است.
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ چون AD نیمساز است.
- AD هم ضلع مشترک دو مثلث است.

پس △ADC ≅ △ABD (حالت ض ز ض) و در نتیجه زاویه‌های متناظر $\hat{B} = \hat{C}$ برابرند.

۲۰۰ صفحه ۹۴ **فعالیت**

مثلثی رسم کنید و دو زاویه و ضلع بین آنها را روی سه برگ کاغذ پوستی بکشید. مثلثی بسازید که دو زاویه و ضلع بین آنها با مثلث اولیه برابر باشد. آیا این مثلث با مثلث اولیه هم‌نهشت است؟ آیا می‌توانید مثلثی با همین شرایط بسازید که هم‌نهشت نباشد؟

بله، هم‌نهشت است؛ ضلع را رسم می‌کنیم و در دو سر آن زاویه‌ها را می‌سازیم؛ امتداد دو ضلع دیگر یکدیگر را فقط در یک نقطه قطع می‌کنند. نمی‌توان مثلث هم‌نهشت‌نشده‌ای با این شرایط ساخت. پس اگر دو زاویه و ضلع بین آنها در دو مثلث برابر باشد، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند (حالت ز ض ز).

irantooshe.ir

۲۰۱ صفحه ۹۵ | کار در کلاس

در شکل، زاویه‌های B و C با هم برابرند و نیمساز زاویه‌ی A را رسم کرده‌ایم. نشان دهید دو مثلث ABD و ACD هم‌نهشت‌اند و دو ضلع AB و AC برابرند. (راهنمایی: ابتدا برای مساوی بودن $\hat{D}_1$ و $\hat{D}_2$ دلیل بیاورید.) نتیجه: اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند، آن مثلث ... است.

- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ چون AD نیمساز است و $\hat{B} = \hat{C}$ (فرض).
- پس $\hat{D}_1 = 180^\circ - \hat{A}_1 - \hat{B} = 180^\circ - \hat{A}_2 - \hat{C} = \hat{D}_2$ (مجموع زاویه‌های مثلث 180° است).
- AD ضلع مشترک است.

بنابراین $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ (حالت ز ض ز) و $AB = AC$.

نتیجه: اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند، آن مثلث **متساوی‌الساقین** است.

۲۰۲ صفحه ۹۵ | تمرین

۱ــ در هر قسمت، بعضی ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات داده شده برای تشخیص هم‌نهشتی دو مثلث کافی است پیدا کنید و حالت هم‌نهشتی را بنویسید.

قاعده: دو مثلث وقتی هم‌نهشت‌اند که یکی از این سه حالت برقرار باشد: سه ضلع نظیر به نظیر برابر (ض ض ض)؛ دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها (ض ز ض)؛ دو زاویه و ضلع بین آنها (ز ض ز). اگر زاویه‌ی برابر بین دو ضلع برابر نباشد (مثلاً دو ضلع و زاویه‌ی غیربین) یا فقط سه زاویه برابر باشد، اطلاعات کافی نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰۳ صفحه ۹۵ | تمرین

۲ــ در هر شکل اجزای مساوی را پیدا و علامت‌گذاری کنید؛ سپس حالت هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید.
الف) هر دو مثلث متساوی‌الاضلاع‌اند. ب) قطر متوازی‌الاضلاع رسم شده است. ج) دو قطر یکدیگر را در مرکز مشترک دو دایره قطع کرده‌اند.

- الف) در هر مثلث متساوی‌الاضلاع سه ضلع برابرند؛ با ضلع مشترک (یا ضلع‌های مساوی) سه ضلع نظیر به نظیر برابرند: (ض ض ض).
- ب) در متوازی‌الاضلاع ضلع‌های مقابل برابرند و قطر ضلع مشترک دو مثلث است: (ض ض ض).
- ج) شعاع‌های هر دایره برابرند و زاویه‌های متقابل به رأس مساوی‌اند: (ض ز ض).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۰۴ صفحه ۹۵ تمرین

۳ــ اگر دو زاویه و یک ضلع غیربین از یک مثلث با دو زاویه و یک ضلع غیربین از مثلثی دیگر برابر باشند، از شکل کدام مورد را می‌توان نتیجه گرفت؟ الف) دو مثلث با یکدیگر هم‌نهشت‌اند. ب) ممکن است دو مثلث هم‌نهشت نباشند.

گزینه‌ی (الف). چون دو زاویه از دو مثلث برابرند، زاویه‌ی سوم هم برابر است (180° − مجموع دو زاویه‌ی دیگر)؛ پس ضلع برابر بین دو زاویه‌ی نظیر قرار می‌گیرد و دو مثلث به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت‌اند.

۲۰۵ صفحه ۹۶ فعالیت

۱ــ در هر قسمت، وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ی DEF برابر است. اندازه‌ی ضلع سوم هر مثلث را پیدا کنید. آیا سه ضلع دو مثلث مساوی است؟ آیا دو مثلث هم‌نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟

۲ــ آیا اگر وتر و یک ضلع دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند؟ چرا؟

۱)

- وتر ۵ و ضلع ۲: ضلع سوم هر دو مثلث $\sqrt{25-4}=\sqrt{21}$
- وتر ۸ و ضلع ۷: ضلع سوم هر دو مثلث $\sqrt{64-49}=\sqrt{15}$

در هر قسمت سه ضلع دو مثلث نظیر به نظیر برابر است، پس مثلث‌ها به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند. چون هر دو قائم‌الزاویه‌اند، آن را (و ض) می‌نامیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲)

بله. طبق رابطه‌ی فیثاغورس ضلع سوم هر مثلث از وتر و ضلع دیگر به‌طور یکتا به دست می‌آید ($c^2=a^2-b^2$)؛ پس ضلع سوم دو مثلث برابر است و دو مثلث به حالت ض ض ض هم‌نهشت‌اند.

تیزان نوشته
توشه ای برای موفقیت

۲۰۶ صفحه ۹۶ کار در کلاس

۱ــ پاره‌خط AH ارتفاع وارد بر قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین ABC است. چرا مثلث‌های ایجاد شده هم‌نهشت‌اند؟

۲ــ با توجه به علامت‌های شکل، مثلث‌های هم‌نهشت را پیدا کنید و حالت هم‌نهشتی هر جفت را بیان کنید.

(۱

دو مثلث ABH و ACH قائم‌الزاویه‌اند ($\hat{H} = 90^\circ$)، وترهایشان برابر است (AB = AC ساق‌های متساوی‌الساقین) و ضلع AH مشترک است؛ پس به حالت (و ض) هم‌نهشت‌اند.

(۲

هر جفت مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وتر و یک ضلع (یا وتر و یک زاویه‌ی تند) نظیر به نظیر برابر دارند هم‌نهشت‌اند؛ حالت هر جفت را (و ض) یا (و ز) می‌نویسیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰۷ صفحه ۹۷ فعالیت

۱ــ در هر قسمت، وتر و یک زاویه‌ی تند از مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC با وتر و یک زاویه‌ی تند از مثلث قائم‌الزاویه‌ی DEF برابر است. زاویه‌ی دیگر هر مثلث را پیدا کنید. آیا دو مثلث هم‌نهشت‌اند؟ در چه حالتی؟

۲ــ آیا اگر وتر و یک زاویه‌ی تند دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که هم‌نهشت‌اند؟ چرا؟

(۱

زاویه‌ی تند دوم برابر است با 90° - زاویه‌ی تند داده شده: برای 37° برابر 53°، برای 20° برابر 70° و برای 60° برابر 30° است. هر دو مثلث در هر قسمت سه زاویه‌ی برابر و وتر برابر دارند، پس به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

(۲

بله. زاویه‌ی تند دوم هر دو مثلث (90° - زاویه‌ی تند معلوم) برابر است. پس دو زاویه و ضلع (وتر) بین یا کنار آنها برابر است و مثلث‌ها به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت‌اند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۰۸ صفحه ۹۷ کار در کلاس

۱ــ از نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB، بر دو خط موازی a و b عمود رسم کرده‌ایم. دو مثلث ایجاد شده به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟

۲ــ در شکل، هر شانزده زاویه‌ی کوچک وسط شکل با هم مساوی و هشت پاره‌خط آبی نیز با هم مساوی‌اند. شانزده مثلث قائم‌الزاویه‌ی شکل به چه حالتی هم‌نهشت‌اند؟

۱)

هر مثلث قائم‌الزاویه است، وترها برابرند (MA = MB چون M وسط AB است) و زاویه‌های تند در M متقابل به رأس‌اند و مساوی‌اند؛ پس دو مثلث به حالت (و ز) هم‌نهشت‌اند.

۲)

هر مثلث قائم‌الزاویه یک زاویه‌ی تند برابر (زاویه‌ی کوچک وسط) و یک ضلع برابر (پاره‌خط آبی) دارد؛ پس همه به حالت (و ز) هم‌نهشت‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۰۹ صفحه ۹۸ فعالیت

۱ــ آیا شادی با اندازه‌گیری یک مثال دلیلی برای درستی جمله‌ی «هر نقطه‌ی روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است» آورده است؟

۲ــ شادی دلیلی با هم‌نهشتی می‌آورد. آیا این بار دلیل آورده است؟ تساوی‌ها را توضیح دهید.

۳ــ برای درستی جمله‌ی «هر نقطه‌ی روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است» دلیل بیاورید.

۱)

خیر؛ اندازه‌گیری برای یک نقطه فقط درستی را در یک مثال نشان می‌دهد و ثابت نمی‌کند که برای همه‌ی نقاط درست است.

۲)

بله. فرض کنید K وسط AB و O نقطه‌ای دلخواه روی عمودمنصف است. در دو مثلث AOK و BOK:

- $\angle OKA = \angle OKB = 90^\circ$ چون OK بر AB عمود است.
- AK = KB چون K وسط AB است.
- OK ضلع مشترک است.

پس $\triangle AOK \cong \triangle BOK$ (حالت ض ز ض) و در نتیجه OA = OB.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۳)

فرض کنید P نقطه‌ای روی نیمساز زاویه‌ی O و H و H′ پای عمودهای P بر دو ضلع زاویه باشند. در دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OPH و OPH′: وتر OP مشترک است و $\angle POH = \angle POH'$ چون OP نیمساز است. پس به حالت (و ز) هم‌نهشت‌اند و $PH = PH'$؛ یعنی P از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.

۲۱۰ صفحه ۹۹ تمرین

۱ــ در هر شکل بعضی ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی مشخص شده‌اند. مواردی را که اطلاعات برای تشخیص هم‌نهشتی دو مثلث کافی است پیدا کنید و حالت هم‌نهشتی را بنویسید.

برای هر شکل بررسی می‌کنیم که آیا یکی از حالت‌های (ض ض ض)، (ض ز ض)، (ز ض ز) و برای مثلث قائم‌الزاویه (و ض) یا (و ز) برقرار است. اگر زاویه‌ی برابر بین دو ضلع برابر نباشد، یا فقط زاویه‌ها برابر باشند، اطلاعات کافی نیست.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۱ صفحه ۹۹ تمرین

۲ــ اجزای مساوی را پیدا و علامت‌گذاری کنید و حالت هم‌نهشتی دو مثلث را بنویسید. الف) خط d از مرکز دایره می‌گذرد و دو خط a و b بر قطر دایره عمودند. ب) خط p از مرکز دایره گذشته است. ج) نقطه‌ی O مرکز مشترک دو دایره و پاره‌خط‌های AB و CD به ترتیب بر OB و OD عمودند.

- الف) دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویه‌های متقابل به رأس برابر در مرکز دایره و شعاع‌های برابر؛ حالت (و ز).
- ب) شعاع‌ها برابرند و زاویه‌های متقابل به رأس مساوی‌اند؛ دو مثلث (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند.
- ج) $OA = OC$ (شعاع دایره‌ی بزرگ)، $OB = OD$ (شعاع دایره‌ی کوچک) و $\angle B = \angle D = 90^\circ$؛ دو مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع برابر: (و ض).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۲ صفحه ۹۹ تمرین

۳ــ در هریک از موارد تمرین (۲)، مشخص کنید هر مثلث را با چه تبدیلی می‌توان بر مثلث دیگر منطبق کرد.

- الف) تقارن محوری نسبت به خط d (که از مرکز می‌گذرد).

- ب) دوران 180° حول مرکز دایره (نقطه‌ای که p از آن می‌گذرد).
- ج) دوران حول نقطه‌ی O (مرکز مشترک دو دایره) یا در صورت قرینه بودن، تقارن نسبت به خطی که از O می‌گذرد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۳ صفحه ۱۰۰ تمرین ترکیبی

۱ــ در شکل، سطح شیب‌داری را می‌بینید (ابعاد ۵۵، ۲۲ و ۱۵ متر). طول این سطح شیب‌دار (x) را به دست آورید.

سطح شیب‌دار وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع‌های قائم آن $55 - 22 = 33$ متر (طول افقی) و ۱۵ متر (ارتفاع) است:

$x^2 = 33^2 + 15^2 = 1089 + 225 = 1314 \Rightarrow x \approx 36.2$ متر.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۴ صفحه ۱۰۰ تمرین ترکیبی

۲ــ الگوی شکل با مثلث‌های هم‌نهشت (ضلع‌های ۲، ۴ و ۵) ساخته می‌شود. الف) دو شکل بعدی را رسم کنید. ب) محیط هر شکل را پیدا کنید. ج) محیط شکل شماره‌ی ۶ چقدر می‌شود؟ د) محیط شکل شماره‌ی ۷ چقدر می‌شود؟

هر مثلث جدید که به شکل قبل اضافه می‌شود، یک ضلع مشترک پنهان می‌کند و دو ضلع جدید (۲ و ۵) به محیط می‌افزاید:

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۶	۷
محیط	11	18	25	46	53

الف) هر شکل جدید با افزودن یک مثلث هم‌نهشت دیگر به انتهای شکل قبل رسم می‌شود. ب) محیط شکل nام: $7n + 4$. ج) $7 \times 6 + 4 = 46$ د) $7 \times 7 + 4 = 53$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی هشتم - فصل هفتم

توان و جذر

فهرست

۲۱۵ صفحه ۱۰۲ · تمرین یادآوری — ضرب توان‌ها با پایه یا توان مساوی ۱۱۹

۲۱۶ صفحه ۱۰۳ · فعالیت — توان یک عدد توان‌دار ۱۱۹

۲۱۷ صفحه ۱۰۳ · کار در کلاس — توان یک عدد توان‌دار ۱۲۰

۲۱۸ صفحه ۱۰۴ · تمرین — مکعب، توان و درستی تساوی‌ها ۱۲۰

۲۱۹ صفحه ۱۰۴ · تمرین — گزینه‌ی درست ۱۲۱

۲۲۰ صفحه ۱۰۵ · تمرین — ساده کردن عبارت‌های توان‌دار ۱۲۲

۲۲۱ صفحه ۱۰۶ · فعالیت — تقسیم توان‌ها با پایه‌ی مساوی ۱۲۲

۲۲۲ صفحه ۱۰۷ · کار در کلاس — تقسیم عددهای توان‌دار ۱۲۳

۲۲۳ صفحه ۱۰۷ · فعالیت — تقسیم توان‌ها با توان مساوی ۱۲۳

۲۲۴ صفحه ۱۰۸ · فعالیت — قانون تقسیم با توان‌های مساوی ۱۲۴

۲۲۵ صفحه ۱۰۸ · کار در کلاس — تقسیم با توان مساوی و ساده کردن ۱۲۴

۲۲۶ صفحه ۱۰۸ · تمرین — نوشتن عدد به صورت توان‌دار ۱۲۵

۲۲۷ صفحه ۱۰۹ · تمرین — ساده کردن، جای خالی، مرتب کردن ۱۲۵

۲۲۸ صفحه ۱۰۹ · خواندنی — رشد باکتری‌ها ۱۲۶

۲۲۹ صفحه ۱۱۰ · فعالیت — طول پل و جذر تقریبی ۱۲۶

۲۳۰ صفحه ۱۱۱ · کار در کلاس — جذر تقریبی ۲ و ۲۰۰ ۱۲۷

۲۳۱ صفحه ۱۱۲ · کار در کلاس — جدول مقدار تقریبی جذرها ۱۲۷

۲۳۲ صفحه ۱۱۲ · تمرین — جذر تقریبی و مقایسه ۱۲۸

۲۳۳ صفحه ۱۱۳ · تمرین — جاهای خالی روی محور و نزدیک‌ترین عدد ۱۲۸

۲۳۴ صفحه ۱۱۴ · فعالیت — نمایش $2\sqrt{}$ و رادیکال‌ها روی محور ۱۲۹

۲۳۵ صفحه ۱۱۴ · کار در کلاس — نمایش $2\sqrt{-3}$ روی محور ۱۲۹

۲۳۶ صفحه ۱۱۵ · فعالیت — جذر حاصل‌ضرب ۱۳۰

۲۳۷ صفحه ۱۱۵ · کار در کلاس — ضرب رادیکال‌ها ۱۳۰

۲۳۸ صفحه ۱۱۶ · فعالیت — جذر حاصل تقسیم ۱۳۱

۲۳۹ صفحه ۱۱۶ · کار در کلاس — جذر کسر و موقعیت روی محور ۱۳۱

۲۴۰ صفحه ۱۱۷ · تمرین — نزدیک‌ترین عدد طبیعی و محور ۱۳۲

۲۴۱ صفحه ۱۱۷ · تمرین — مربع جادویی با جمع ۶- ۱۳۲

۲۴۲ صفحه ۱۱۷ · تمرین — محاسبه، جذر ۷۰۰ و عددهای بین ۱۳۳

۲۴۳ صفحه ۱۱۸ · تمرین ترکیبی — مرور فصل ۷ ۱۳۳

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۱۵ صفحه ۱۰۲ — تمرین یادآوری

یادآوری: اگر a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند: a^m × a^n = a^(m+n) و a^m × b^m = (a×b)^m.

۱ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید: 2^3 × 2^6، 2^3 × 3^3، (-2/3)^5 × (-2/3)^2، 14^4 × 3^6 و ...

۲ــ حاصل هر یک را به صورت عبارتی توان‌دار بنویسید: a^8 × a^2، x^4 × y^4، (ab)^5 × a^3 × b^4، (xy)^2 × (xy)^7، 8a × (2a)^3 × 2a^3

۳ــ حجم مکعبی به ضلع a^2 چند برابر حجم مکعبی به ضلع a است؟

۴ــ جاهای خالی را با عددها و حرف‌های مناسب پر کنید: 18^5 = (□×6)^5، a^8 = a^3 × a^□

---

۱) وقتی پایه‌ها مساوی‌اند توان‌ها جمع می‌شوند و وقتی توان‌ها مساوی‌اند پایه‌ها در هم ضرب می‌شوند: 2^9 = 2^3 × 2^6؛ 2^12 = 16^3 = (8×2)^3 = 2^3 × 8^3؛ (-2/3)^7 = (-2/3)^5 × (-2/3)^2.

- a^2 × a^8 = a^10
- x^4 × y^4 = (xy)^4
- (ab)^5 × a^3 × b^4 = a^5 b^5 × a^3 × b^4 = a^8 b^9
- (xy)^2 × (xy)^7 = (xy)^9
- 8a × (2a)^3 × 2a^3 = 8a × 8a^3 × 2a^3 = 128 a^7

۳) حجم مکعب اول a^6 = (a^2)^3 و حجم مکعب دوم a^3 است؛ نسبت: a^6 ÷ a^3 = a^3؛ یعنی حجم مکعب اول a^3 برابر حجم مکعب دوم است.

۴) 18^5 = (6×3)^5 پس جای خالی 3؛ a^8 = a^3 × a^5 پس جای خالی 5.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۱۶ صفحه ۱۰۳ — فعالیت

حاصل عبارت 2^3 × 2^3 × 2^3 × 2^3 را به دو روش زیر می‌توان نشان داد: 2^3 × 2^3 × 2^3 × 2^3 = 2^12 و 2^(3+3+3+3) = (2^3)^4. با مقایسه‌ی تساوی‌های بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت 2^12 = (2^3)^4؟ اکنون، درستی تساوی‌های زیر را به هر روشی که می‌توانید بررسی کنید: (7^2)^5 = 7^10، ...^(3)((4/11))^، a^8 = (a^2)^4. آنچه را فراگرفته‌اید به صورت قانون کلی بیان کنید: اگر a عددی دلخواه و m و n عددهایی طبیعی باشند، آنگاه (a^m)^n = a^□.

بله؛ 2^12 = (2^3)^4. هر یک از تساوی‌ها درست است: 7^10 = 7^2 × 7^2 × 7^2 × 7^2 × 7^2 و (7^2)^5 = 7^2 × 7^2 × 7^2 × 7^2 × 7^2 = a^8 و (a^2)^4 = a^2 × a^2 × a^2 × a^2 = a^8.

قانون کلی: (a^m)^n = a^(m×n) — برای توان‌رساندن به یک عدد توان‌دار، توان‌ها در هم ضرب می‌شوند.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۷ صفحه ۱۰۳ | کار در کلاس

۱ــ حاصل عبارت‌های زیر را به صورت توان‌دار بنویسید: 4^(5^7)، 7^(18^2)، 8^(x^4)، 3^((ab)^2)، 3^(xy^2)، n^(2^m)

- (5^7)^4 = 5^28
- (18^2)^7 = 18^14
- (x^4)^8 = x^32
- ((ab)^2)^3 = (ab)^6 = a^6 b^6
- (xy^2)^3 = x^3 y^6
- (2^m)^n = 2^(mn)

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۸ صفحه ۱۰۴ | تمرین

۱ــ حجم مکعبی به ضلع 8 cm را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید که پایه‌ی آن عدد 2 باشد.

۲ــ بیست و هفت برابر عدد 9^5 را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۳ــ کدام یک از تساوی‌های زیر، درست و کدام نادرست است؟ توضیح دهید: 4^3 × 2^3 = 4^(3^2)، 5^3 × 3^5 = (3^5)^2، 8^3 = 4^(3^2)، 2^3 = 2^(3^0)، 9^5 = 2^(5^3)، 4^9 = 3^2 × 3^2، 5^3 × (2^2)^5 = 12^5، 1 = a^2 · a^0، 2^6 = 2^(3^(−2))، 4^6 = 4^(−6)

۴ــ در جاهای خالی عدد مناسب قرار دهید: □^3 = 3^5 = (3^□) = 9^5

۱) حجم مکعب 2^9 = 2^(3^3) = 8^3 = سانتی‌متر مکعب.

۲) 3^13 = 3^10 × 3^3 = 3^3 × (3^2)^5 = 3^3 × 9^5 = 27.

تساوی	درست/نادرست	دلیل
$3^4\times3^2 = {}^4(3^2)$	نادرست	$3^6 = 3^4\times3^2$ ولی $3^8 = {}^4(3^2)$
${}^2(3^5) = 3^5\times3^5$	درست	هر دو برابر 3^{10} هستند
$3^8 = {}^4(3^2)$	درست	توان‌ها ضرب می‌شوند: $8 = 4\times2$
$3^2 = {}^2(3^0)$	نادرست	$1 = 1^2 = {}^2(3^0)$
$5^9 = {}^2(5^3)$	نادرست	$5^6 = {}^2(5^3)$
$9^4 = 3^2\times3^2$	نادرست	$6561 = 9^4$ ولی $81 = 3^4 = 3^2\times3^2$
$12^5 = {}^5(2^2)\times3^5$	درست	$12^5 = {}^5(4\times3) = 4^5\times3^5$
$a^2\cdot a^0 = 1$	نادرست	$a^2\cdot a^0 = a^2\cdot1 = a^2$
$2^6 = {}^2({}^3(2-))$	درست	$2^6 = 64 = {}^2(8-) = {}^2({}^3(2-))$
$4^6 = {}^6(4-)$	درست	توان زوج، حاصل مثبت

۴) 3^10 = (3^2)^5 = 9^5.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۱۹ صفحه ۱۰۴ تمرین

۳ــ حاصل عبارت (-5)^5 × (-5)^3 برابر کدام یک از اندازه‌های زیر است؟ الف) (-5)^8 ب) -5^8

(-5)^8 = (-5)^5 × (-5)^3 که با گزینه‌ی (الف) برابر است (-5)^8 = 5^8 مثبت است، ولی -5^8 = -(5^8) منفی است).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲۰ صفحه ۱۰۵ تمرین

۱ــ حاصل عبارت‌های $6^3 \times 3^7 \times 2^2 \times 2^5$ و $240 \times 240 \times 240$ و $x^3 y^4 \cdot (y^3)^2 \cdot (x^2)^5$ را ساده کنید و به صورت عبارت توان‌دار بنویسید.

۴ــ کدام عددهای طبیعی را می‌توان به جای □ نوشت تا نامساوی $(-2)^{\square} < 15$ درست باشد؟

۵ــ حاصل $3^5 + 3^5 + 3^5$ و حاصل $3^5 \times 27$ را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۶ــ عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را طوری در جاهای خالی قرار دهید که یک تساوی درست به دست آید (از هر چهار عدد استفاده کنید).

۷ــ مقدار عددی عبارت‌های جبری را به ازای $a = 6$، $b = -2$ و $c = -4$ به دست آورید.

- $240 \times 240 \times 240 = 240^3$
- $x^{13} y^{10} = x^{10} \cdot y^6 \cdot x^3 \cdot y^4 = (x^2)^5 \cdot (y^3)^2 \cdot x^3 y^4$

۴) $(-2)^n$ وقتی n زوج باشد مثبت و برابر 2^n است؛ $2^4 = 16 > 15$؛ پس n باید عددی زوج و $n \geq 4$ باشد: 4, 6, 8, ... (برای $n = 2$: $4 < 15$ و برای n فرد حاصل منفی است.)

۵) $3^6 = 3 \times 3^5 = 3^5+3^5+3^5$ و $3^8 = 3^3 \times 3^5 = 27 \times 3^5$.

۱، ۶، ۷) برای عبارت‌های توان‌دار دیگر، از قانون‌های $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$، $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ و $(a^m)^n = a^{(mn)}$ استفاده می‌کنیم؛ در ارزیابی عددی، ابتدا مقدارها را جای‌گذاری و سپس توان و ضرب را محاسبه می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۲۱ صفحه ۱۰۶ فعالیت

دمای مرکز خورشید حدود 10^7 درجه‌ی سانتی‌گراد است. این دما چند برابر دمایی است که آب در آن به جوش می‌آید؟ پاسخ را ضمن کامل کردن جاهای خالی به صورت یک عدد توان‌دار بیان کنید و مراحل حل مسئله را نیز توضیح دهید. حل: آب در ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد به جوش می‌آید و داریم: $10^2 = 100$. $10^7 \div 10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10)/(10 \times 10) = 10^2$. بنابراین $10^7 \div 10^2 = 10^{\square}$ یعنی دمای مرکز خورشید □ برابر دمایی است که آب در آن به جوش می‌آید. اکنون، حاصل هر یک از تقسیم‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید: $(-9)^3 \div (-9)^5$، $(3/2)^3 \div (3/2)^6$. با استفاده از نمونه‌های داده‌شده برای محاسبه‌ی تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی قانونی بنویسید: اگر a عددی دلخواه و مخالف صفر و m، n عددهای طبیعی باشند: $a^m \div a^n = a^{\square}$

$10^7 \div 10^2 = 10^5$؛ یعنی دمای مرکز خورشید $10^5 = 100000$ برابر دمای جوش آب است. تقسیم را به صورت کسر $10^7/10^2 = 10^5/1$ هم می‌توان نوشت.

- $(-9)^5 \div (-9)^3 = (-9)^2$

- $(3/2)^6 \div (3/2)^3 = (3/2)^3$

قانون: $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$ ($a \neq 0$ و $m > n$) — در تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی، پایه را می‌نویسیم و توان مخرج را از توان صورت کم می‌کنیم.

۲۲۲ صفحه ۱۰۷ کار در کلاس

۱ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید: $8^5 \div 8^9$، $6 \div 6^3$، $(-3)^5 \div$ $(-3)^2$، $(4/5)^3 \div (4/5)^6$، $(-0.3)^2 \div (-0.3)^5$

۲ــ جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید: $3^4 = \square^3 \div 3^5$، $14^3 = (\square)^2 \div 14^5$

۳ــ حاصل را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید: $a^5 \div a^{12}$، $(xy)^4 \div (xy)^7$، $(-x)^3 \div (-x)^7$

- $8^9 \div 8^5 = 8^4$
- $6^3 \div 6 = 6^2$
- $(-3)^5 \div (-3)^2 = (-3)^3$
- $(4/5)^6 \div (4/5)^3 = (4/5)^3$
- $(-0.3)^5 \div (-0.3)^2 = (-0.3)^3$
- $3^5 \div 3^1 = 3^4$ پس جای خالی 1
- $14^5 \div 14^2 = 14^3$ پس جای خالی 14
- $a^{12} \div a^5 = a^7$
- $(xy)^7 \div (xy)^4 = (xy)^3$
- $(-x)^7 \div (-x)^3 = (-x)^4 = x^4$

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲۳ صفحه ۱۰۷ فعالیت

مثال‌های داده‌شده را مطالعه کنید و با پر کردن جاهای خالی توضیح دهید که پاسخ هر یک از تقسیم‌ها چگونه به دست آمده است: $2^4 = (12/6)^4 = (12\times12\times12\times12)/(6\times6\times6\times6)$؛ $12^4 \div 6^4 =$ $7^5 \div 3^5 =$ $(3/7)^5$؛ $(-2/3)^3 = (-4/6)^3 = 6^3 \div (-4)^3$

هنگام تقسیم دو عدد توان‌دار با توان مساوی، هر عامل صورت با عامل مخرج تقسیم می‌شود؛ یعنی حاصل برابر (پایه‌ی صورت ÷ پایه‌ی مخرج) به همان توان است: $12^4 \div 6^4 = (12\div6)^4 = 2^4$.

$(3/7)^5 = 7^5 \div 3^5$ و $(-2/3)^3 = (-4/6)^3 = 6^3 \div (-4)^3$.

۲۲۴ صفحه ۱۰۸ فعالیت

با توجه به مثال‌های صفحه‌ی قبل، توضیح دهید تساوی 4^5 = 2^5 ÷ 8^5 چگونه به دست آمده است. اکنون، برای تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی، قانون زیر را کامل کنید: «تقسیم اعداد توان‌دار با توان‌های مساوی: ...». به کمک قانونی که نوشته‌اید، حاصل تقسیم‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید: 6^8 ÷ 3^8، 4^(−3) ÷ 4^(−2). اکنون قانون فوق را با نمادهای ریاضی هم نشان دهید.

4^5 = 5^(8÷2) = 2^5 ÷ 8^5. **قانون:** در تقسیم دو عدد توان‌دار با توان‌های مساوی، توان را حفظ می‌کنیم و پایه‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم.

- 6^8 ÷ 3^8 = (6÷3)^8 = 2^8
- (−2)^4 ÷ (−3)^4 = ((−2)÷(−3))^4 = (2/3)^4

با نماد: اگر a و b دو عدد دلخواه و m یک عدد طبیعی و b ≠ 0 باشد: a^m ÷ b^m = (a ÷ b)^m = (a/b)^m.

۲۲۵ صفحه ۱۰۸ کار در کلاس

۱ــ حاصل هر یک از تقسیم‌های زیر را به صورت عدد توان‌دار بنویسید: 3^7 ÷ 5^7، 7^3 ÷ 14^3، 5^(−8) ÷ 5^(−2)، 27^2 ÷ 9^2

۲ــ عبارت‌های زیر را ساده کنید و در صورت امکان، پاسخ را به صورت عدد توان‌دار بنویسید:

3^3 × 2^7 × 3^4 × 5^7 و عبارت‌های دیگر

- 5^7 ÷ 3^7 = (5/3)^7
- 14^3 ÷ 7^3 = 2^3
- (−8)^5 ÷ (−2)^5 = 4^5
- 9^2 ÷ 27^2 = (9/27)^2 = (1/3)^2

۲) 30^7 = 10^7 × 3^7 = (3^4 × 3^3) × (5^7 × 2^7) = 3^3 × 2^7 × 3^4 × 5^7.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۲۶ صفحه ۱۰۸ تمرین

۱ــ هر یک از عددهای زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید: 81، 8-، 1024، 125، 729، ...

۲ــ کدام عبارت‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟ توضیح دهید.

عدد	به صورت توان‌دار
81	$9^2 = 3^4$
8-	$(-2)^3$
1024	$32^2 = 4^5 = 2^{10}$
125	5^3
729	$27^2 = 9^3 = 3^6$

۲) برای بررسی هر تساوی، دو طرف را با قانون‌های توان ($a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$، $(a^m)^n = a^{(mn)}$، $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$، $a^m \div b^m = (a/b)^m$) ساده می‌کنیم و مقدارها را مقایسه می‌کنیم؛ مثلاً $(-5)^2 = 25$ و $-5^2 = -25$ متفاوت‌اند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۲۷ صفحه ۱۰۹ تمرین

۳ــ حاصل هر عبارت را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

۴ــ در جاهای خالی عدد مناسب بگذارید: $3^9 = 3^{\square} \times 3^5$، $(-6)^3 = (-6)^{\square} \div (-6)^8$

۵ــ عددهای زیر را از کوچک‌ترین تا بزرگ‌ترین و به ترتیب از چپ به راست مرتب کنید: 6^5، 11^2، -4^3، $(-1)^5$، 0، $(1/2)^5$

۶ــ کدام تساوی‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند؟

۷ــ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید: $-(10^2)^3$، $[(-10)^2]^3$، $(x^2 y^3)^4$

۸ــ نصف 2^9 و ربع 4^7 را به صورت عددهای توان‌دار بنویسید.

- $3^9 = 3^4 \times 3^5$ پس جای خالی 4
- $(-6)^3 = (-6)^5 \div (-6)^8$ پس جای خالی 5

۵) مقدارها: $6^5 = 7776$، $11^2 = 121$، $-4^3 = -64$، $(-1)^5 = -1$، 0، $(1/2)^5 = 1/32$. ترتیب صعودی: $-4^3 < (-1)^5 < 0 < (1/2)^5 < 11^2 < 6^5$.

- $-(10^2)^3 = (-100)^3 = -10^6$
- $[(-10)^2]^3 = 100^3 = 10^6$

- $(x^2 y^3)^4 = x^8 y^{12}$

۸) نصف 2^9: $2^8 = 2 \div 2^9$؛ ربع 4^7: $4^6 = 4 \div 4^7$ (یا $2^{12} = 4 \div 2^{14}$).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۲۸ صفحه ۱۰۹ **خواندنی**

باکتری‌ها در وضعیت مطلوب در هر ۲۰ دقیقه به دو نیم تقسیم می‌شوند. برای مثال اگر در حال حاضر ۲ باکتری داشته باشیم در ۲۰ دقیقه دیگر $2^2 = 4$ باکتری و در ۶۰ دقیقه دیگر $2^4 = 16$ باکتری خواهیم داشت. به نظر شما اگر مواد غذایی لازم موجود باشد، پس از گذشت ۲۴ ساعت چند باکتری خواهیم داشت؟

---

۲۴ ساعت $= 24 \times 60 = 1440$ دقیقه و $1440 \div 20 = 72$ مرحله‌ی دو برابرشدن است. اگر با ۲ باکتری شروع کنیم: $2 \times 2^{72} = 2^{73}$ باکتری (عددی حدود $9/4 \times 10^{21}$) خواهیم داشت.

---

۲۲۹ صفحه ۱۱۰ **فعالیت**

آزاده، نرگس و نسیم هنگام گردش علمی به یک آب‌گذر (کانال) به عرض ۵ متر رسیدند. در طرف دیگر آب‌گذر دیواره‌ای به ارتفاع ۳ متر وجود داشت. آنها می‌خواهند بدانند اگر پلی برای رفتن به طرف دیگر آب ساخته شود، طول آن چقدر خواهد بود؟ با دقت در گفت‌وگوی این سه دانش‌آموز سعی کنید نظر هر دانش‌آموز را توضیح دهید. اگر این دانش‌آموزان بخواهند به کمک روش بالا مقدار $\sqrt{34}$ را تا دو رقم اعشار حساب کنند، چگونه باید این کار را انجام دهند؟

- **آزاده:** مسئله را به یک مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۳ و ۵ متر تبدیل کرده است؛ طول پل وتر آن مثلث است.
- **نرگس:** از رابطه‌ی فیثاغورس استفاده می‌کند: $\text{وتر}^2 = 2^5 + 2^3 = 34$ و می‌گوید چون $25 < 34 < 36$ پس $5 < \sqrt{34} < 6$.
- **نسیم:** وسط ۵ و ۶ یعنی ۵.۵ را آزمایش می‌کند: $5.5^2 = 30.25 < 34$ پس $\sqrt{34}$ از ۵.۵ بزرگ‌تر است.
- **آزاده:** عددهای ۵.۷، ۵.۸ و ۵.۹ را بررسی می‌کند: مجذورها ۳۲.۴۹، ۳۳.۶۴ و ۳۴.۸۱؛ پس $5.8 < \sqrt{34} < 5.9$ و $\sqrt{34} \approx 5.8$.

برای دو رقم اعشار، عددهای بین ۵.۸ و ۵.۹ را آزمایش می‌کنیم: $5.82^2 = 33.87$، $5.83^2 = 33.99$، $5.84^2 = 34.11$؛ پس $\sqrt{34} \approx 5.83$ (ماشین‌حساب: 5.83095). طول پل حدود ۵.۸ متر است.

۲۳۰ صفحه ۱۱۱ کار در کلاس

۱ــ با پر کردن جاهای خالی، مقدار √2 و √200 را به صورت تقریبی تا یک رقم اعشار به دست آورید. نتیجه را با آنچه ماشین‌حساب به دست می‌آورد، مقایسه کنید. الف) 2 > √2 > 1... ب) 225 > 200 > 196

الف) 4 > √2 > √1 یعنی 2 > √2 > 1. وسط ۱ و ۲ یعنی 1.5: 2 < 2.25 = 1.5^2، پس √2 < 1.5. جدول: 1.3^2 = 1.69، 1.4^2 = 1.96، 1.5^2 = 2.25؛ چون 1.96 < 2 < 2.25، √2 < 1.5 < 1.4 و √2 ≈ 1.4 (ماشین‌حساب: 1.41421).

ب) 225 > 200 > 196 پس 15 > √200 > 14. وسط ۱۴ و ۱۵ یعنی 14.5: 200 < 210.25 = 14.5^2؛ جدول: 14.1^2 = 198.81، 14.2^2 = 201.64؛ پس 14.2 > √200 > 14.1 و √200 ≈ 14.1 (ماشین‌حساب: 14.14213).

۲۳۱ صفحه ۱۱۲ کار در کلاس

۲ــ ابتدا مقدار تقریبی هر عددی را که در جدول آمده است، حدس بزنید؛ سپس به کمک ماشین‌حساب، حاصل را تا دو رقم اعشار پیدا کنید و با مقداری که حدس زده‌اید، مقایسه کنید: √140، √99، √68، √18.5، √10.3، √5، √3

عدد	حدس	ماشین‌حساب
√140	۱۲	11.83
√99	۱۰	9.95
√68	۸	8.25
√18.5	۴٫۳	4.30
√10.3	۳٫۲	3.21
√5	۲٫۲	2.24
√3	۱٫۷	1.73

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۳۲ صفحه ۱۱۲ تمرین

۱ــ به کمک روشی که در درس یاد گرفته‌اید، مقدار هر یک از عددهای زیر را تا یک رقم اعشار به دست آورید:

√19، √40، √150، √385

۲ــ در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید. از ماشین‌حساب کمک بگیرید.

عدد	بین دو عدد طبیعی	تقریب تا یک رقم اعشار
√19	4 و 5	4.4
√40	6 و 7	6.3
√150	12 و 13	12.2
√385	19 و 20	19.6

۲) برای مقایسه‌ی دو عدد جذری، مجذور هر دو را مقایسه می‌کنیم؛ اگر a < b (هر دو مثبت) آنگاه √a < √b. در مقایسه با عدد معمولی، آن را به صورت جذر عدد مجذورش می‌نویسیم (مثلاً √9 = 3).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۳ صفحه ۱۱۳ تمرین

۳ــ جاهای خالی روی محور را با عددهای مناسب پر کنید.

۴ــ در هر یک از تمرین‌های زیر، یک محور اعداد رسم، و نقطه‌ای روی آن مشخص شده است (نقاط A، B، C).

نقطه‌ی مشخص‌شده روی محور به کدام یک از عددهای داده‌شده نزدیک‌تر است؟ دلیل بیاورید.

برای پر کردن محور، هر عدد جذری را بین دو عدد صحیح متوالی قرار می‌دهیم: √a بین n و n+1 است اگر n^2 ≤ a < (n+1)^2 . برای نزدیک‌ترین عدد: مجذور عدد را با مجذور نقطه‌ی مشخص‌شده مقایسه می‌کنیم؛ مثلاً √79 ≈ 8.9، √98 ≈ 9.9، √81 = 9، √85 ≈ 9.2؛ اگر نقطه نزدیک ۹ باشد، √81 پاسخ است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۳۴ صفحه ۱۱۴ فعالیت

در درس گذشته مقدار $\sqrt{2}$ را هم به صورت تقریبی و هم به کمک ماشین‌حساب محاسبه کردید. در این فعالیت با نمایش $\sqrt{2}$ روی محور اعداد آشنا می‌شویم. مثلث OAB یک مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین به ضلع ۱ است. به مرکز O و شعاع OB کمانی می‌زنیم تا محور اعداد را در نقطه‌ی C قطع کند. طول پاره‌خط OC چقدر است؟ چرا نقطه‌ی C، عدد $\sqrt{2}$ را نمایش می‌دهد؟ به همین روش، نقطه‌ای را روی محور بالا معین کنید که عدد $-\sqrt{2}$ را نمایش دهد. در شکل زیر، تعدادی مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. در هر یک از این مثلث‌ها طول یک ضلع زاویه‌ی قائمه ۱ واحد است. طول وترهای این مثلث‌ها به ترتیب $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{4}$، $\sqrt{5}$ است. چرا؟ آیا می‌توانید به همین ترتیب پاره‌خطی به طول $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ رسم کنید؟ چگونه؟ دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ باز کنید و عددهای $1+\sqrt{3}$ و $2+\sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

OB وتر مثلث قائم‌الزاویه با ضلع‌های ۱ و ۱ است: $OB^2 = 1^2+1^2 = 2$ پس $OB = \sqrt{2}$. چون کمان با شعاع OB رسم شده است، $OC = OB = \sqrt{2}$ و نقطه‌ی C که روی محور است عدد $\sqrt{2}$ را نشان می‌دهد. برای $-\sqrt{2}$ همین کمان را در سمت چپ O روی محور می‌زنیم.

در مثلث بعدی یک ضلع قائمه برابر وتر قبلی و ضلع قائمه‌ی دیگر ۱ است؛ طبق فیثاغورس وتر: $(\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3$ پس $\sqrt{3}$؛ سپس $(\sqrt{3})^2+1 = 4$ پس $\sqrt{4} = 2$؛ $(\sqrt{4})^2 + 1 = 5$ پس $\sqrt{5}$. به همین ترتیب $\sqrt{6}$ و $\sqrt{7}$ را با ادامه‌ی مثلث‌ها (هر بار ضلع قائمه‌ی ۱ واحدی روی وتر قبلی) رسم می‌کنیم.

برای نمایش $1+\sqrt{3}$ با پرگار به اندازه‌ی $\sqrt{3}$ (وتر مثلث سوم) از نقطه‌ی ۱ روی محور کمانی به سمت راست می‌زنیم؛ و برای $2+\sqrt{5}$ دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی $\sqrt{5}$ باز می‌کنیم و از نقطه‌ی ۲ کمان می‌زنیم.

۲۳۵ صفحه ۱۱۴ کار در کلاس

عدد $3-\sqrt{2}$ را روی محور اعداد نمایش دهید. برای نمایش عدد $3-\sqrt{2}$ روی محور از تساوی $3-\sqrt{2} = 3+(-\sqrt{2})$ استفاده کنید.

ابتدا $-\sqrt{2}$ را (مانند فعالیت قبل) در سمت چپ صفر نشان می‌دهیم. سپس دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی $\sqrt{2} \approx 1.41$ باز کرده و از نقطه‌ی ۳ به سمت چپ کمان می‌زنیم؛ نقطه‌ی به‌دست‌آمده $3-\sqrt{2} \approx 1.59$ است که بین ۱ و ۲ قرار دارد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۳۶ صفحه ۱۱۵ فعالیت

با توجه به عددهای داده‌شده‌ی a و b، مانند نمونه جدول زیر را کامل کنید: (a, b) = (9, 16)، (4, 16)، (25, 4). با مقایسه‌ی دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟ آیا می‌توانید حدس خود را به صورت یک عبارت کلامی بیان کنید؟ اگر a و b دو عدد مثبت باشند، داریم √(ab) = √a × √b. به کمک جدول بالا، درستی یا نادرستی رابطه‌ی √(a+b) = √a + √b را بررسی کنید.

a	b	√a	√b	ab	√(ab)	√a × √b
9	16	3	4	144	12	12
4	16	2	4	64	8	8
25	4	5	2	100	10	10

دو ستون آخر برابرند؛ پس جذر حاصل‌ضرب دو عدد مثبت برابر حاصل‌ضرب جذرهای آنهاست: √(ab) = √a × √b.

رابطه‌ی √(a+b) = √a + √b نادرست است: مثلاً برای a = 9 و b = 16: √(9+16) = √25 = 5 ولی √9 + √16 = 3+4 = 7.

۲۳۷ صفحه ۱۱۵ کار در کلاس

۱ــ در تساوی‌های زیر، جاهای خالی را پر کنید: √14 = √2 × √7، √(16×25) = √16 × √25 = 4 × 5

۲ــ کدام یک از عبارت‌های زیر، درست و کدام نادرست است؟ √50 = 5√2، √50 = 25

۳ــ مانند نمونه، تساوی‌های زیر را کامل کنید: √20 = √(4×5) = 2√5؛ √8؛ √18؛ √12؛ √75

- √14 = √2 × √7
- √(16×25) = √16 × √25 = 4 × 5 = 20
- √50 = 25 نادرست است؛ 50 ≠ 25^2 = 625.
- √50 = √(25×2) = √25 × √2 = 5√2 درست است.
- √20 = √(4×5) = 2√5
- √8 = √(4×2) = 2√2
- √18 = √(9×2) = 3√2
- √12 = √(4×3) = 2√3
- √75 = √(25×3) = 5√3

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۳۸ صفحه ۱۱۶ فعالیت

جدول زیر را برای عددهای مثبت a و b کامل کنید. مقدارهای دو سطر آخر را با هم مقایسه کنید و تساوی به‌دست‌آمده را به شکل یک قانون کلی بنویسید: (a, b) = (16, 9), (25, 36), (1, 100), (49, 64)؛ √(a/b) و √a/√b.

a	b	√(a/b)	√a / √b
16	9	4/3	4/3
25	36	5/6	5/6
1	100	1/10	1/10
49	64	7/8	7/8

قانون: برای دو عدد مثبت a و b داریم √(a/b) = √a / √b؛ جذر حاصل تقسیم برابر تقسیم جذرهاست.

۲۳۹ صفحه ۱۱۶ کار در کلاس

۱ــ با استفاده از شکل روبه‌رو، درستی رابطه‌ی √(9/16) = 3/4 را بررسی کنید.

۲ــ در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید: √(1/144) = □، √(49/16) = □، −√(1/49) = □، ...

۳ــ به‌صورت تقریبی مشخص کنید که عددهای داده‌شده نظیر کدام یک از نقاط مشخص‌شده روی محورند؟

۱) مربعی به مساحت 9/16 داریم؛ ضلع آن 3/4 است (9/16 = (3/4)^2)؛ پس √9/√16 = 3/4 = √(9/16).

- √(1/144) = 1/12
- √(49/16) = 7/4
- −√(1/49) = −1/7

۳) هر عدد جذری را با تقریب بین دو عدد صحیح می‌گذاریم (مثلاً √(9/25) = 3/5 = 0.6) بین ۰ و ۱ و √(25/...) بین ۱ و ... و با نقطه‌ها منطبق می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴۰ صفحه ۱۱۷ تمرین

۱ــ نزدیک‌ترین عدد طبیعی به هر یک از عددهای زیر را پیدا کنید: $\sqrt{401}$، $\sqrt{310}$، $\sqrt{9999}$، $\sqrt{280}$، $\sqrt{175}$. درستی پاسخ خود را به کمک ماشین‌حساب بیازمایید.

۲ــ یک محور اعداد رسم کنید و عددهای زیر را به صورت تقریبی روی آن مشخص کنید: $\sqrt{14}$، $\sqrt{10}$، $\sqrt{24}$، $-\sqrt{3}$، $-\sqrt{8}$، $-\sqrt{17}$

عدد	مقدار تقریبی	نزدیک‌ترین عدد طبیعی
$\sqrt{401}$	20.02	20
$\sqrt{310}$	17.61	18
$\sqrt{9999}$	99.995	100
$\sqrt{280}$	16.73	17
$\sqrt{175}$	13.23	13

عدد	مقدار تقریبی
$\sqrt{14}$	3.74
$\sqrt{10}$	3.16
$\sqrt{24}$	4.90
$-\sqrt{3}$	-1.73
$-\sqrt{8}$	-2.83
$-\sqrt{17}$	-4.12

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴۱ صفحه ۱۱۷ تمرین

۳ــ مجموع عددهای واقع بر هر سطر، هر ستون و نیز هر قطر مربع زیر 6- است. جاهای خالی را با چه عددهایی می‌توان پر کرد؟

با نوشتن مجموع هر سطر یا ستون که دو عدد آن معلوم است و برابر قرار دادن آن با 6-، خانه‌ی خالی آن خط به دست می‌آید (خانه‌ی مجهول = -6 - مجموع دو عدد معلوم)؛ سپس این کار را برای خط‌های دیگر تکرار می‌کنیم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۴۲ صفحه ۱۱۷ تمرین

۴ــ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید: $(a^5 \times a^9)(b^{17} \div b^3)$، $\sqrt{36} / \sqrt{25} \times \sqrt{49}$

۵ــ جذر 700 را تا یک رقم اعشار به دست آورید و نتیجه را به کمک ماشین‌حساب بررسی کنید.

۶ــ دو عدد طبیعی بین $\sqrt{5}$ و $\sqrt{17}$ پیدا کنید.

۷ــ پنج عدد بین $\sqrt{3}$ و $\sqrt{8}$ پیدا کنید.

۸ــ اعداد رادیکالی زیر را به صورت ضرب یک عدد طبیعی در یک رادیکال بنویسید: $\sqrt{27}$، $\sqrt{50}$، $\sqrt{200}$

۴) $(ab)^{14} = a^{14} \times b^{14} = (a^5 \times a^9)(b^{17} \div b^3)$؛ و $\sqrt{49} \times \sqrt{25} / \sqrt{36} = 7 \times 5 / 6 = 35/6$.

۵) $26^2 = 676 < 700 < 729 = 27^2$ پس $26 < \sqrt{700} < 27$؛ $26.4^2 = 696.96$ و $26.5^2 = 702.25$ ؛ پس $\sqrt{700} \approx 26.5$ (ماشین‌حساب: 26.4575 که تا یک رقم اعشار 26.5 می‌شود).

۶) $\sqrt{5} \approx 2.24$ و $\sqrt{17} \approx 4.12$؛ عددهای طبیعی بین آنها 3 و 4 هستند.

۷) $\sqrt{3} \approx 1.73$ و $\sqrt{8} \approx 2.83$؛ مثلاً 1.8، 2، 2.2، 2.5، 2.7.

- $\sqrt{27} = \sqrt{(9\times3)} = 3\sqrt{3}$
- $\sqrt{50} = \sqrt{(25\times2)} = 5\sqrt{2}$
- $\sqrt{200} = \sqrt{(100\times2)} = 10\sqrt{2}$

۲۴۳ صفحه ۱۱۸ تمرین ترکیبی

۱ــ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. ۲ــ حاصل تقسیم مقابل را به دست آورید. ۳ــ با تهیه‌ی جدول مناسب، جذر عدد 93 را تا دو رقم اعشار به دست آورید.

۴ــ عددهای زیر را به ترتیب صعودی و از چپ به راست مرتب کنید. ۵ــ به کمک رسم، مکان متناظر با عددهای $\sqrt{10}$، $\sqrt{13}$، $\sqrt{20}$ را روی محور اعداد مشخص کنید. ۶ــ مقدار عددی عبارت داده‌شده را به ازای مقدارهای داده‌شده به دست آورید.

۳) $9^2 = 81 < 93 < 100 = 10^2$ پس $9 < \sqrt{93} < 10$؛ جدول: $9.6^2 = 92.16$، $9.7^2 = 94.09$ $\Rightarrow$ $9.6 < \sqrt{93} < 9.7$؛ $9.64^2 = 92.93$، $9.65^2 = 93.12$ $\Rightarrow$ $\sqrt{93} \approx 9.64$ (ماشین‌حساب: 9.64365).

۵) $\sqrt{10} \approx 3.16$، $\sqrt{13} \approx 3.61$، $\sqrt{20} \approx 4.47$؛ هر یک را با رسم مثلث قائم‌الزاویه $\sqrt{10} = \sqrt{(9+1)}$، $\sqrt{13} = \sqrt{(9+4)}$، $\sqrt{20} = \sqrt{(16+4)}$ و کمان به مرکز مبدأ روی محور مشخص می‌کنیم.

۱، ۲، ۴، ۶) این پرسش‌ها از روی متن قابل بازسازی نیست؛ با قانون‌های توان و جذر حل می‌شوند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

گام به گام ریاضی هشتم - فصل هشتم

آمار و احتمال

فهرست

۲۴۴ صفحه ۱۲۱ · فعالیت — دامنه‌ی تغییرات و دسته‌بندی قد مردان ۱۳۵

۲۴۵ صفحه ۱۲۲ · کار در کلاس — جدول فراوانی دمای هوا ۱۳۵

۲۴۶ صفحه ۱۲۳ · تمرین — دسته‌بندی عمر لامپ و خواندن نمودار ۱۳۶

۲۴۷ صفحه ۱۲۴ · فعالیت — محاسبه‌ی میانگین ۱۳۷

۲۴۸ صفحه ۱۲۵ · کار در کلاس — میانگین ۹ عدد ۱۳۸

۲۴۹ صفحه ۱۲۵ · فعالیت — میانگین داده‌های دسته‌بندی‌شده ۱۳۸

۲۵۰ صفحه ۱۲۶ · کار در کلاس — جدول میانگین قد ۱۳۹

۲۵۱ صفحه ۱۲۶ · تمرین — میانگین از جدول فراوانی ۱۳۹

۲۵۲ صفحه ۱۲۷ · تمرین — تأثیر حذف یک نمره بر میانگین ۱۴۰

۲۵۳ صفحه ۱۲۸ · فعالیت — احتمال و حالت‌های هم‌شانس ۱۴۰

۲۵۴ صفحه ۱۲۹ · فعالیت و کار در کلاس — محاسبه‌ی احتمال ۱۴۱

۲۵۵ صفحه ۱۳۰ · فعالیت — احتمال و چرخنده ۱۴۲

۲۵۶ صفحه ۱۳۱ · تمرین — احتمال: چرخنده، تاس و مهره ۱۴۳

۲۵۷ صفحه ۱۳۲ · فعالیت و کار در کلاس — بررسی حالت‌های ممکن با جدول ۱۴۴

۲۵۸ صفحه ۱۳۳ · فعالیت — نمودار درختی دو چرخنده ۱۴۵

۲۵۹ صفحه ۱۳۴ · تمرین — دوچرخه، چرخنده و تاس ۱۴۵

۲۶۰ صفحه ۱۳۵ · تمرین — چرخنده و تاس، رمز قفل، دو تاس، دو سکه، لوله ۱۴۶

۲۶۱ صفحه ۱۳۶ · تمرین ترکیبی — مرور فصل ۸ ۱۴۶

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۴۴ صفحه ۱۲۱ فعالیت

قد ۴۰ نفر از مردان یک شهر کوچک برحسب سانتی‌متر داده شده است (n = 40). کمترین و بیشترین داده را مشخص کنید. فاصله‌ی بین این دو عدد را دامنه‌ی تغییرات می‌گویند؛ آن را پیدا کنید. داده‌ها را در ۵ دسته با طول تقریباً مساوی بنویسید. در جدول، معنای 130 ≤ x < 145 را توضیح دهید و < و ≤ چه تفاوتی دارند؟ با چوب‌خط فراوانی هر دسته را مشخص کنید.

کمترین داده 130 و بیشترین 205 است؛ **دامنه‌ی تغییرات** 75 = 130 − 205 =. طول هر دسته 15 = 5 ÷ 75.

130 ≤ x < 145 یعنی عددهای بزرگ‌تر یا مساوی ۱۳۰ و کوچک‌تر از ۱۴۵؛ ۱۳۰ داخل دسته است ولی ۱۴۵ نه. علامت ≤ خود عدد را هم شامل می‌شود ولی < خود عدد را شامل نمی‌شود؛ ۱۴۵ در دسته‌ی بعدی می‌آید.

حدود دسته‌ها	فراوانی	قد
130 ≤ x < 145	5	قد کوتاه
145 ≤ x < 160	7	کوتاه‌تر از متوسط
160 ≤ x < 175	16	متوسط
175 ≤ x < 190	8	بلندتر از متوسط
190 ≤ x ≤ 205	4	قد بلند

مجموع فراوانی‌ها 40 = 4+8+16+7+5 است.

۲۴۵ صفحه ۱۲۲ کار در کلاس

۱ــ میانگین دمای هوا در ۴۵ روز گزارش شده است. جدول فراوانی داده‌ها را براساس پرسش‌ها مشخص و نمودار میله‌ای رسم کنید: دامنه‌ی تغییرات چقدر است؟ داده‌ها را به چهار دسته تقسیم می‌کنیم؛ طول هر دسته چقدر است؟

۲ــ با توجه به فعالیت صفحه‌ی قبل: قد بیشتر افراد در چه محدوده‌ای است؟ با توجه به نمودار میله‌ای متوجه چه چیزی می‌شوید؟ میانگین قد مردان در کدام دسته است؟ کاربردهای دیگر این آمار؟

۳ــ نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس (۳۶ نمره) داده شده است. آنها را در ۵ دسته با طول مساوی دسته‌بندی کنید، جدول و نمودار میله‌ای رسم و وضعیت کلاس را توصیف کنید.

۱) کمترین دما 8− و بیشترین 8 است؛ دامنه‌ی تغییرات 16 = (8−)−8 و طول هر دسته 4 = 4 ÷ 16.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

حدود دسته‌ها	فراوانی
$-8 \leq x < -4$	5
$-4 \leq x < 0$	11
$0 \leq x < 4$	17
$4 \leq x \leq 8$	12

نمودار میله‌ای: چهار میله با ارتفاع‌های 5، 11، 17 و 12 (محور افقی: دسته‌ها، محور عمودی: فراوانی).

۲) بیشتر افراد (۱۶ نفر) قدی بین 160 و 175 سانتی‌متر دارند. نمودار نشان می‌دهد که فراوانی دسته‌ی میانی بیشترین و دسته‌های دو سر (خیلی کوتاه و خیلی بلند) کمترین است. میانگین قد در دسته‌ی $160 \leq x < 175$ قرار می‌گیرد (میانگین واقعی حدود 167). از این آمار برای تعیین اندازه‌ی لباس و کفش در تولید، ساخت وسایل مدرسه و طراحی وسایل نقلیه می‌توان استفاده کرد.

۳) کمترین نمره 5 و بیشترین 20 است؛ دامنه 15 و طول دسته $15 \div 5 = 3$.

حدود دسته‌ها	فراوانی
$5 \leq x < 8$	3
$8 \leq x < 11$	5
$11 \leq x < 14$	10
$14 \leq x < 17$	11
$17 \leq x \leq 20$	7

وضعیت کلاس خوب است: بیشتر نمره‌ها در دسته‌های تا 17 11 هستند (۲۱ از ۳۶ نفر) و ۷ نفر نمره‌ی بالای ۱۷ دارند؛ ضعیف‌ها (زیر ۸) تنها ۳ نفرند. میانگین کلاس حدود 13.3 است.

توشه ای برای موفقیت

۲۴۶ صفحه ۱۲۳ تمرین

۱ــ ۳۰ لامپ به صورت تصادفی انتخاب و طول عمر آنها برحسب ساعت اندازه‌گیری شده است. داده‌ها را به ۵ دسته تقسیم و جدول فراوانی و نمودار میله‌ای آن را رسم کنید.

۲ــ نمودار میله‌ای مدت زمان رفتن دانش‌آموزان از خانه به مدرسه رسم شده است. چند دانش‌آموز فاصله‌ی خانه تا مدرسه را در ۱۰ یا بیشتر از ۱۰ دقیقه طی می‌کنند؟ این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟

۳ــ نمودار نمره‌های دانش‌آموزان یک کلاس را می‌بینید. این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟ آیا این دسته‌بندی مناسب است؟ چرا؟ آیا این کلاس وضعیت خوبی دارد؟ چرا؟

۱) کمترین مقدار 152 و بیشترین 172؛ دامنه 20 و طول دسته $20 \div 5 = 4$.

حدود دسته‌ها	فراوانی
$152 \leq x < 156$	4
$156 \leq x < 160$	11
$160 \leq x < 164$	5
$164 \leq x < 168$	3
$168 \leq x \leq 172$	7

مجموع فراوانی‌ها 30 = 7+3+5+11+4 است؛ نمودار میله‌ای با میله‌هایی به این ارتفاع‌ها رسم می‌شود.

۲ و ۳) پاسخ این دو پرسش به مقدارهای میله‌های نمودار وابسته است که در متن موجود نیست. روش: برای تعداد دانش‌آموزان ارتفاع همه‌ی میله‌ها را جمع می‌کنیم؛ برای «۱۰ دقیقه یا بیشتر» فراوانی دسته‌هایی را که از ۱۰ شروع می‌شوند جمع می‌کنیم. دسته‌بندی وقتی مناسب است که طول دسته‌ها مساوی و تعداد دسته‌ها نه خیلی کم و نه خیلی زیاد باشد.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۴۷ صفحه ۱۲۴ فعالیت

۱ــ نمره‌های ریاضی یک دانش‌آموز ۱۷، ۱۸، ۱۵، ۱۷ و ۱۹ است. میانگین نمره‌های او را حساب کنید. میانگین = مجموع داده‌ها / تعداد داده‌ها یا به صورت جبری $\bar{x} = \Sigma x / n$.

۲ــ نمره‌های یک دانش‌آموز: ۱۶، ۱۵/۵، ۱۶، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۱۸/۵، ۱۴، ۱۶/۵، ۱۷/۵. میانگین را پیدا کنید. چند نمره بالاتر و چند نمره پایین‌تر از میانگین‌اند؟ تفاضل‌های بالای میانگین و پایین‌تر از آن را جمع و مقایسه کنید.

۳ــ میانگین نمره‌های ۷ درس ۱۶/۵ است. نمره‌های دو درس دیگر ۱۷ و ۱۵ به آنها افزوده شود، میانگین جدید؟ آیا می‌توان میانگین ۱۵ و ۱۷ (۱۶) را با ۱۶/۵ میانگین گرفت؟ چرا؟

۴ــ میانگین عددهای ۱۱، ۱۲، ۱۲، ۱۳، ۱۳، ۱۳، ۱۴، ۱۴، ۱۵ را به دست آورید. بین این عددها چه رابطه‌ای وجود دارد؟ فاصله‌ی هر عدد تا میانگین چقدر است؟

---

۱) 17.2 = 86/5 = (17+18+15+17+19)/5.

۲) مجموع نمره‌ها 165 است و میانگین 16.5 = 10 ÷ 165. نمره‌های بالاتر از میانگین: 17.5، 18.5، 19، 17 (۴ تا)؛ پایین‌تر: 14، 15، 16، 15.5، 16 (۵ تا)؛ و 16.5 مساوی میانگین است. تعداد آنها برابر نیست.

تفاضل‌های بالای میانگین: 1+2+2.5+0.5 = 6؛ تفاضل‌های پایین‌تر: 2.5+1.5+0.5+1+0.5 = 6. این دو مجموع برابرند (مجموع انحراف‌ها از میانگین صفر می‌شود).

۳) مجموع ۷ درس 16.5 × 7 = 115.5؛ مجموع ۹ درس 147.5 = 115.5+17+15؛ میانگین جدید 147.5 ÷ 9 ≈ 16.39.

نمی‌توان؛ میانگین ۱۶ و ۱۶/۵ برابر ۱۶/۲۵ می‌شود که با ۱۶/۳۹ فرق دارد، زیرا ۱۶/۵ نماینده‌ی ۷ نمره است و ۱۶ نماینده‌ی ۲ نمره؛ تعداد داده‌ها در میانگین‌گیری مؤثر است.

۴) مجموع 117 = و میانگین 13 = 9 ÷ 117. عددها نسبت به ۱۳ متقارن‌اند: فاصله‌ی ۱۲ و ۱۴ برابر ۱ و فاصله‌ی ۱۱ و ۱۵ برابر ۲ است؛ میانگین در وسط داده‌ها است.

۲۴۸ صفحه ۱۲۵ **کار در کلاس**

با توجه به رابطه‌ای که پیدا کرده‌اید، میانگین عددهای ۱۷، ۱۴، ۱۱، ۱۵، ۱۲، ۱۹، ۱۸، ۱۳، ۱۶ را به دست آورید.

مجموع 135 = 16+13+18+19+12+15+11+14+17 =؛ میانگین 15 = 9 ÷ 135.

۲۴۹ صفحه ۱۲۵ **فعالیت**

۱ــ به کمک ماشین‌حساب میانگین قد ۴۰ نفر را پیدا کنید. ۲ــ مرکز دسته‌ی $130 \le x < 145$ را به دست آورید. ۳ــ مرکز هر دسته را به جای داده‌های آن دسته قرار دهید. ۴ــ چرا در عددهای تغییریافته ۴ تا ۱۹۷/۵ وجود دارد؟ ۵ــ میانگین ۴۰ عدد جدید را پیدا کنید؛ چگونه برای مجموع از ضرب استفاده می‌کنید؟ این ضرب‌ها چه ارتباطی با فراوانی‌ها دارند؟ ۶ــ میانگین به‌دست‌آمده را با میانگین واقعی مقایسه کنید؛ خطای روش چقدر است؟

۱) مجموع قدها 6679 و میانگین 166.98 ≈ 40 ÷ 6679 است.

۲) مرکز دسته 137.5 = 2/(130+145)؛ مرکز دسته‌ها: 137.5, 152.5, 167.5, 182.5, 197.5.

۴) چون در دسته‌ی $190 \le x \le 205$ چهار داده (۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۰ و ۲۰۵) قرار دارند و هر کدام به ۱۹۷/۵ تبدیل می‌شود؛ یعنی فراوانی این دسته ۴ است.

۵) مجموع جدید با ضرب «مرکز دسته × فراوانی» ساخته می‌شود: 137.5×5 + 152.5×7 + 167.5×16 + 182.5×8 + 197.5×4 = 6685؛ میانگین 167.125 = 40 ÷ 6685. هر عدد ضرب‌شده در فراوانی همان دسته است.

۶) خطا 0.15 = 166.975 − 167.125 است؛ یعنی روش بسیار نزدیک به مقدار واقعی است.

۲۵۰ صفحه ۱۲۶ کار در کلاس

با توجه به فعالیت صفحه‌ی قبل با کامل کردن جدول (مرکز دسته، فراوانی، مرکز دسته × فراوانی) میانگین داده‌ها را دوباره محاسبه کنید.

حدود دسته‌ها	فراوانی	مرکز دسته	مرکز × فراوانی
$130 \leq x < 145$	5	137.5	687.5
$145 \leq x < 160$	7	152.5	1067.5
$160 \leq x < 175$	16	167.5	2680
$175 \leq x < 190$	8	182.5	1460
$190 \leq x \leq 205$	4	197.5	790
مجموع	40	—	6685

میانگین 167.125 = 40 ÷ 6685 =.

۲۵۱ صفحه ۱۲۶ تمرین

۱ــ میانگین دمای هوا (کار در کلاس صفحه‌ی ۱۲۲) و میانگین عمر لامپ‌ها (تمرین ۱ صفحه‌ی ۱۲۳) را به دست آورید. از جدول فراوانی استفاده کنید.

۲ــ جدول داده‌شده (دسته‌های $0 \leq x < 4$، $4 \leq x < 8$، ... با فراوانی‌ها و جمع ۴۴) را کامل و میانگین را حساب کنید.

۱) دما: مرکز دسته‌ها 6, −2, 2, −6 و فراوانی‌ها 12, 17, 11, 5؛ 1.2 = 54/45 = 45/(72 + 34 + 22 − 30−) درجه (میانگین واقعی داده‌ها حدود ۰/۷۸ است).

لامپ: مرکز دسته‌ها 170.5, 166, 162, 158, 154 و فراوانی‌ها 7, 3, 5, 11, 4؛ 161.85 ≈ 4855.5/30 = 30/(616+1738+810+498+1193.5) ساعت (میانگین واقعی 161.3).

۲) برای هر دسته مرکز را 2/(کران پایین + کران بالا) می‌گیریم (18, 14, 10, 6, 2)، آن را در فراوانی ضرب می‌کنیم، حاصل‌ها را جمع می‌کنیم و بر 44 تقسیم می‌کنیم. چون برخی فراوانی‌ها در متن خوانا نیست، عدد نهایی گزارش نشده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۵۲ صفحه ۱۲۷ تمرین

۳ــ میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس ۳۰ نفره ۱۷/۲۵ شده است. یکی از دانش‌آموزان نمره‌ی ۳/۵ گرفته در حالی که بقیه نمره‌ی بالای ۱۵ گرفته‌اند. الف) اگر نمره‌ی این دانش‌آموز را کنار بگذاریم، حدس می‌زنید معدل کلاس کمتر یا بیشتر شود؟ با محاسبه بررسی کنید. ب) فرض کنید همه‌ی دانش‌آموزان نمره‌ی کمتر از ۱۴ گرفته‌اند به جز یک نفر که ۲۰ گرفته؛ معدل ۳۰ نفره ۱۰/۲۵ است. اگر او را کنار بگذاریم، معدل کمتر می‌شود یا بیشتر؟ محاسبه کنید.

الف) حدس: معدل بیشتر می‌شود، چون نمره‌ی کنار گذاشته‌شده از همه‌ی نمره‌ها خیلی کمتر است. مجموع 517.5 = 17.25 × 30؛ پس از حذف: 17.72 ≈ 29 ÷ 514 = 29 ÷ (517.5 − 3.5) که از 17.25 بیشتر است.

ب) حدس: معدل کمتر می‌شود، چون نمره‌ی حذف‌شده (۲۰) از همه بیشتر است. مجموع = 10.25 × 30 307.5؛ پس از حذف: 9.91 ≈ 29 ÷ 287.5 = 29 ÷ (20 − 307.5) که از 10.25 کمتر است.

۲۵۳ صفحه ۱۲۸ فعالیت

۱ــ ده کارت با عددهای ۱۱ تا ۲۰ داریم و یکی را تصادفی برمی‌داریم. احتمال اول بودن عدد بیشتر است یا مرکب بودن؟ چرا؟

۲ــ در هر مورد حالت‌های هم‌شانس را بنویسید: الف) عقربه‌ی چرخنده را می‌چرخانیم. ب) تاسی را می‌اندازیم.

۳ــ از کیسه‌ای که در آن سه مهره‌ی سبز و یک مهره‌ی سفید است، یک مهره بیرون می‌آوریم. شایان گفت «دو حالت: سبز، سفید» و علی مهره‌های سبز را شماره‌گذاری کرد و گفت «چهار حالت». چرا پاسخ علی درست است؟

۱) عددهای ۱۱ تا ۲۰: اول‌ها 11, 13, 17, 19 (۴ تا) و مرکب‌ها 12, 14, 15, 16, 18, 20 (۶ تا). احتمال مرکب بودن بیشتر است چون تعداد مرکب‌ها بیشتر است.

۲) الف) اگر چرخنده به قسمت‌های مساوی تقسیم شده باشد، ایستادن عقربه روی هر قسمت هم‌شانس است. ب) تاس: ۶ حالت 1, 2, 3, 4, 5, 6 هم‌شانس هستند.

۳) دو حالت شایان هم‌شانس نیستند، چون سه مهره‌ی سبز در برابر یک مهره‌ی سفید است و شانس برداشتن سبز بیشتر است. علی با شماره‌گذاری، هر مهره را یک حالت جدا کرد و چهار حالت سبز۱, سبز۲, سبز۳, سفید هم‌شانس شد (هر مهره شانس برابر دارد).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵۴ صفحه ۱۲۹ فعالیت و کار در کلاس

۴ــ در آزمایش کارت‌های ۱۱ تا ۲۰: الف) در چند حالت عدد اول است؟ ب) در چند حالت مرکب است؟ ج) احتمال هر پیشامد را بنویسید. احتمال = تعداد حالت‌های مطلوب / تعداد همه‌ی حالت‌های ممکن

۱ــ پنج توپ با شماره‌های ۱ تا ۵ در جعبه است. اگر عدد توپ زوج باشد احمد جایزه می‌گیرد. احتمال جایزه گرفتن؟

۲ــ حمید می‌داند دوستش در خرداد به دنیا آمده. احتمال اینکه ۱۵ خرداد باشد؟ (خرداد ۳۱ روز دارد)

۳ــ برای هر مورد یک مثال بنویسید: الف) احتمال صفر ب) احتمال کمتر از ۱/۲ ج) احتمال ۱/۲ د) احتمال بیشتر از ۱/۲ هـ) احتمال یک. جمله‌ی «احتمال رخ دادن یک پیشامد برابر صفر، یک یا عددی بین صفر و یک است.» درست است یا نادرست؟

۴) الف) ۴ حالت ب) ۶ حالت؛ ج) احتمال اول بودن = 4/10 = 2/5 و احتمال مرکب بودن = 6/10 = 3/5.

۱) عددهای زوج ۲ و ۴ هستند (۲ حالت از ۵ حالت)؛ احتمال = 2/5.

۲) یک حالت مطلوب از ۳۱ حالت: 1/31.

- **الف)** احتمال صفر: مثلاً با یک تاس عدد ۷ بیاید.
- **ب)** کمتر از ۱/۲: مثلاً با تاس عدد ۶ بیاید (1/6).
- **ج)** برابر ۱/۲: مثلاً با تاس عدد زوج بیاید (3/6) یا سکه رو بیاید.
- **د)** بیشتر از ۱/۲: مثلاً با تاس عدد کوچک‌تر از ۶ بیاید (5/6).
- **هـ)** احتمال یک: مثلاً با تاس عددی بین ۱ و ۶ بیاید.

جمله درست است: تعداد حالت‌های مطلوب نه منفی است و نه از کل حالت‌ها بیشتر؛ پس احتمال $0 \le 1 \le$.

اگر هیچ حالت مطلوبی نباشد احتمال صفر و اگر همه‌ی حالت‌ها مطلوب باشند احتمال یک است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵۵ صفحه ۱۳۰ فعالیت

۱ــ الف) عقربه‌ی چرخنده‌ی (۸ قسمتی) را می‌چرخانیم؛ احتمال هر حالت را در جدول بنویسید. ب) حاصل جمع دو عدد هر سطر جدول را به دست آورید؛ چرا برابرند؟ ج) احتمال رخ دادن یک پیشامد 3/10 است؛ احتمال رخ ندادن آن چقدر است؟ چرا؟

۲ــ الف) چرخنده‌ها را طوری رنگ کنید که احتمال ایستادن عقربه روی سفید 1/2 باشد. ب) بین این فعالیت و تساوی کسرها چه ارتباطی وجود دارد؟

۳ــ از کیسه‌ای حاوی ۵۰ مهره، مهره‌ای تصادفی بیرون می‌آوریم. احتمال سبز بودن 3/10 است. چند مهره سبزند؟

۱) هر سطر جدول احتمال «بایستد» و «نایستد» است؛ برای نارنجی 1/8 و 7/8. جمع هر سطر برابر 1 است؛ زیرا یا پیشامد رخ می‌دهد یا رخ نمی‌دهد و مجموع احتمال همه‌ی حالت‌ها 1 است.

ج) 7/10 = 3/10 − 1؛ چون احتمال رخ دادن و رخ ندادن با هم ۱ می‌شود.

۲) نیمی از قسمت‌های چرخنده (مثلاً ۴ از ۸ یا ۳ از ۶) را سفید می‌کنیم. چون 1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8، کسرهای مساوی احتمال برابر را نشان می‌دهند، هرچند تعداد قسمت‌ها فرق کند.

۳) 15 = 3/10 × 50 مهره‌ی سبز.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵۶ صفحه ۱۳۱ تمرین

۱ــ اگر عقربه‌ی چرخنده‌ی روبه‌رو را ۳۰۰ بار بچرخانیم، عبارت‌های درست را ✓ و نادرست را × مشخص کنید: الف) عقربه ۱۰۰ بار روی زرد می‌ایستد. ب) انتظار داریم عقربه تقریباً ۱۰۰ بار روی آبی بایستد. ج) تعداد دفعاتی که عقربه روی هر یک از این سه رنگ می‌ایستد حتماً برابر است.

۲ــ تاسی را می‌اندازیم؛ احتمال: الف) مضرب ۵ بیاید. ب) شمارنده‌ی ۶ بیاید. ج) ۷ یا بیشتر بیاید.

۳ــ سی مهره با شماره‌های ۱ تا ۳۰ در گردونه است. احتمال: الف) فرد بودن عدد ب) مضرب ۵ بودن ج) اول بودن.

۴ــ احتمال ایستادن عقربه روی سبز، آبی و قرمز (الف، ب، ج) را با توجه به چرخنده به دست آورید.

۵ــ در کیسه‌ای مهره‌های رنگی هست و احتمال سبز بودن مهره 3/8 است. الف) احتمال سبز نبودن مهره؟ ب) آیا می‌توان تعداد مهره‌های کیسه را پیدا کرد؟ چرا؟

۶ــ سکه‌ای در چهار پرتاب پشت سر هم رو آمده است. اگر بار پنجم بیندازیم چه می‌آید؟ چرا؟

۱) چون عقربه ۳ قسمت مساوی (احتمال 1/3 برای هر رنگ) دارد: الف) ✓ (100 = 1/3 × 300، ولی «حدوداً»؛ اگر چرخنده سه رنگ مساوی باشد معمولاً می‌گوییم تقریباً). ب) ✓ ج) ×: تعداد دفعات تقریباً برابر است نه حتماً برابر.

- **۲-الف)** مضرب ۵ فقط ۵: 1/6
- **۲-ب)** شمارنده‌های ۶: ۱، ۲، ۳، ۶ یعنی 4/6 = 2/3
- **۲-ج)** ۷ یا بیشتر روی تاس وجود ندارد: 0
- **۳-الف)** فردها ۱۵ تا: 15/30 = 1/2
- **۳-ب)** مضرب‌های ۵ (۵،۱۰،...،۳۰) ۶ تا: 6/30 = 1/5
- **۳-ج)** اول‌ها: ۲،۳،۵،۷،۱۱،۱۳،۱۷،۱۹،۲۳،۲۹ یعنی ۱۰ تا: 10/30 = 1/3

۴) احتمال هر رنگ برابر تعداد قسمت‌های آن رنگ / تعداد کل قسمت‌ها است؛ چون شکل در دست نیست، پاسخ دقیق نوشته نشد.

۵) الف) 5/8 = 3/8 – 1. ب) نه؛ فقط نسبت مهره‌های سبز به کل (3/8) معلوم است؛ تعداد کل می‌تواند ۸، ۱۶، ۲۴ و ... باشد.

۶) سکه حافظه ندارد و پرتاب‌ها از هم مستقل‌اند؛ شانس رو یا پشت آمدن در بار پنجم باز هم 1/2 است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵۷ صفحه ۱۳۲ فعالیت و کار در کلاس

۱ــ سارا، ستاره و محدثه دو سکه را هم‌زمان می‌اندازند. اگر هر دو رو آمد سارا، اگر هر دو پشت آمد ستاره و اگر یکی رو و یکی پشت آمد محدثه امتیاز می‌گیرد. این بازی عادلانه است؟

۲ــ ۲۰ بار آزمایش کنید و با نتایج هم‌گروهی‌هایتان (۸۰ آزمایش) درستی فکرتان را بررسی کنید.

۳ــ با جدول حالت‌های ممکن پرتاب دو سکه، احتمال: یک سکه رو و یک سکه پشت، هر دو رو، هر دو پشت را حساب کنید. دوباره به پرسش ۱ پاسخ دهید.

کار در کلاس: محمد دو شاخه گل رز به رنگ‌های سفید، قرمز و صورتی را تصادفی و به ترتیب برای مادر و پدرش برمی‌دارد. الف) همه‌ی حالت‌های ممکن را با جدول پیدا کنید. ب) در چند حالت دست‌کم یکی از گل‌ها سفید است؟

۱ و ۳) حالت‌های ممکن: رو‌ــرو، رو‌ــپشت، پشت‌ــرو، پشت‌ــپشت (۴ حالت هم‌شانس).

- احتمال یک رو و یک پشت: 1/2 = 2/4
- احتمال هر دو رو: 1/4
- احتمال هر دو پشت: 1/4

بازی عادلانه نیست: محدثه شانس بیشتری (1/2) نسبت به سارا و ستاره (1/4 هر کدام) دارد.

۲) در ۲۰ یا ۸۰ آزمایش انتظار داریم تعداد «یکی رو و یکی پشت» حدود نصف آزمایش‌ها و هر یک از دو حالت دیگر حدود یک‌چهارم آزمایش‌ها باشد؛ نتیجه‌ی ۸۰ آزمایش معمولاً به این مقدار نزدیک‌تر است.

کار در کلاس) الف) گل مادر ۳ حالت و گل پدر ۳ حالت؛ جدول ۹ حالت دارد: س‌ـس، س‌ـق، س‌ـص، ق‌ـس، ق‌ـق، ق‌ـص، ص‌ـس، ص‌ـق، ص‌ـص. ب) در ۵ حالت دست‌کم یکی سفید است (س‌ـس، س‌ـق، س‌ـص، ق‌ـس، ص‌ـس)؛ احتمال 5/9.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۵۸ صفحه ۱۳۳ فعالیت

۱ــ عقربه‌های دو چرخنده را می‌چرخانیم و رنگ‌هایی را که عقربه‌ها روی آن می‌ایستند یادداشت می‌کنیم. الف) با کامل کردن نمودار درختی، همه‌ی حالت‌های ممکن را پیدا کنید. ب) احتمال اینکه هر دو عقربه روی قرمز بایستند چقدر است؟

۲ــ سه سکه را هم‌زمان می‌اندازیم. پارسا و عرفان هر کدام با یک روش (جدول و نمودار درختی) همه‌ی حالت‌ها را نوشته‌اند. الف) راه‌حل هر دو را کامل کنید. ب) کدام را بیشتر دوست دارید؟ ج) روش دیگری پیشنهاد کنید. د) تعداد حالت‌های ممکن چندتاست؟ هـ) احتمال اینکه هر سه سکه رو بیاید؟ و) احتمال اینکه دقیقاً دو سکه رو و یکی پشت بیاید؟

۱) چرخنده‌ی اول دارای قرمز۱ و قرمز۲ و زرد (شکل در متن نیست). هر شاخه‌ی نمودار درختی یک رنگ از چرخنده‌ی اول است و هر رنگ از چرخنده‌ی دوم به آن وصل می‌شود؛ تعداد حالت‌ها × (تعداد رنگ‌های اول) (تعداد رنگ‌های دوم) است. احتمال هر دو قرمز = تعداد حالت‌های قرمز-قرمز / کل حالت‌ها.

۲) برای سه سکه ۸ حالت داریم: رورورو، رورو‌پشت، رو‌پشت‌رو، رو‌پشت‌پشت، پشت‌رورو، پشت‌رو‌پشت، پشت‌پشت‌رو، پشت‌پشت‌پشت. روش دیگر: ضرب 8 = 2×2×2.

- **د)** 8 حالت
- **هـ)** هر سه رو: 1/8
- **و)** دقیقاً دو رو و یک پشت: رورو‌پشت، رو‌پشت‌رو، پشت‌رورو یعنی 3/8

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۵۹ صفحه ۱۳۴ تمرین

۱ــ در یک کارخانه دوچرخه‌ی جاده و کوهستان هر کدام در سه رنگ زرد، قرمز و آبی و دو اندازه‌ی ۲۴ و ۲۶ تولید می‌شود. الف) چند نوع دوچرخه تولید می‌شود؟ ب) علی صفحه‌ای از نشریه را تصادفی انتخاب می‌کند؛ احتمال اینکه دوچرخه‌ی کوهستان آبی‌رنگ اندازه‌ی ۲۶ دیده شود؟

الف) 12 = 2 × 3 × 2 نوع. **ب)** فقط یک نوع از ۱۲ نوع مطلوب است؛ احتمال 1/12.

۲۶۰ صفحه ۱۳۵ تمرین

۲ــ عقربه‌ی چرخنده‌ی (سبز، قرمز، زرد) را می‌چرخانیم و تاسی را می‌اندازیم. الف) همه‌ی حالت‌ها را با جدول پیدا کنید. ب) در چند حالت عقربه روی قرمز است و تاس زوج؟

۳ــ رمز قفل یک رقم (۰ تا ۹) است. الف) احتمال یافتن رمز با یک حدس؟ ب) اگر رمز دو رقمی شود احتمال چه تغییری می‌کند؟

۴ــ دو تاس را می‌اندازیم: الف) ۳۶ حالت را با جدول پیدا کنید. ب) احتمال اینکه یکی ۳ و دیگری ۵ بیاید؟ ج) احتمال اینکه هر دو ۵ بیاید؟ د) ب و ج را مقایسه کنید و دلیل تفاوت را بنویسید.

۵ــ دو سکه را می‌اندازیم. احتمال اینکه دست‌کم یکی رو بیاید چقدر است؟

۶ــ لوله‌های انشعاب آب به هر قسمت که برسند دو شاخه می‌شوند. پس از طی ۵ قسمت چند خروجی خواهیم داشت؟ با عدد توان‌دار نشان دهید.

۲) الف) جدول ۳ سطر (رنگ) و ۶ ستون (تاس) دارد: 18 = 6 × 3 حالت. ب) قرمز با تاس زوج (۲، ۴، ۶): 3 حالت (احتمال 1/6 = 3/18).

۳) الف) 1/10. ب) رمز دو رقمی ۱۰۰ حالت (00 تا 99) دارد؛ احتمال 1/100 می‌شود، یعنی ۱۰ برابر کمتر.

۴) الف) جدول 36 = 6 × 6 حالتی (6,6) ،... ،(1,2) ،(1,1). ب) حالت‌های (3,5) و (5,3): 1/18 = 2/36 . ج) فقط (5,5): 1/36. د) در حالت (ب) دو حالت مطلوب است چون ترتیب تاس‌ها فرق می‌کند، ولی در (ج) فقط یک حالت؛ پس احتمال (ب) دو برابر (ج) است.

۵) حالت‌ها: رورو، روپشت، پشت‌رو، پشت‌پشت. به جز پشت‌پشت، در ۳ حالت دست‌کم یکی رو است: 3/4.

۶) هر قسمت تعداد خروجی را دو برابر می‌کند: 2×2×2×2×2 = 2^5 = 32 خروجی.

۲۶۱ صفحه ۱۳۶ تمرین ترکیبی

۱ــ با توجه به نمودار مقابل (دسته‌های ۰ تا ۱۰، ۱۰ تا ۲۰، ۲۰ تا ۳۰، ۳۰ تا ۴۰) میانگین داده‌ها را به دست آورید.

۲ــ دو تاس را می‌اندازیم. الف) تعدادی از حالت‌های هم‌شانس ممکن را بنویسید. ب) احتمال اینکه هر دو تاس ۱ بیاید چقدر است؟

۱) مرکز دسته‌ها 5, 15, 25, 35 است؛ $(5\times f_1 + 15\times f_2 + 25\times f_3 + 35\times f_4) / (f_1+f_2+f_3+f_4)$ = میانگین که f فراوانی‌ها (ارتفاع میله‌ها) است. چون ارتفاع میله‌ها از متن خوانا نیست، عدد نهایی گزارش نمی‌شود.

۲) الف) (6,6) ،... ،(1,3) ،(1,2) ،(1,1) (۳۶ حالت هم‌شانس). ب) فقط حالت (1,1)؛ 1/36.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

گام به گام ریاضی هشتم - فصل نهم

دایره

فهرست

۲۶۲ صفحه ۱۳۸ · فعالیت — دایره و وضعیت خط و دایره ۱۴۸

۲۶۳ صفحه ۱۳۹ · کار در کلاس — خط مماس و شعاع ۱۴۹

۲۶۴ صفحه ۱۳۹ · فعالیت — تا کردن دایره و وتر ۱۴۹

۲۶۵ صفحه ۱۴۰ · فعالیت — شعاع عمود بر مماس، یافتن قطر بشقاب و وتر ۱۴۹

۲۶۶ صفحه ۱۴۱ · کار در کلاس — زاویه‌ها و طول مماس ۱۵۰

۲۶۷ صفحه ۱۴۱ · تمرین — دو مماس از یک نقطه و عمق آب ۱۵۱

۲۶۸ صفحه ۱۴۲ · فعالیت — زاویه‌ی مرکزی و کمان ۱۵۱

۲۶۹ صفحه ۱۴۳ · کار در کلاس — اندازه‌ی کمان و زاویه‌ی مرکزی ۱۵۲

۲۷۰ صفحه ۱۴۳ · فعالیت — هشت‌ضلعی منتظم ۱۵۲

۲۷۱ صفحه ۱۴۴ · کار در کلاس — رسم پنج‌ضلعی منتظم و تقسیم دایره ۱۵۳

۲۷۲ صفحه ۱۴۵ · تمرین — کمان‌ها و زاویه‌های مرکزی ۱۵۴

۲۷۳ صفحه ۱۴۶ · فعالیت — زاویه‌ی محاطی ۱۵۵

۲۷۴ صفحه ۱۴۷ · کار در کلاس — زاویه‌ی محاطی در شکل‌ها ۱۵۵

۲۷۵ صفحه ۱۴۷ · فعالیت — زاویه‌های محاطی روبه‌رو به یک کمان ۱۵۶

۲۷۶ صفحه ۱۴۸ · کار در کلاس — لوزی محاط در دایره ۱۵۶

۲۷۷ صفحه ۱۴۸ · تمرین — زاویه‌ها و کمان‌های مجهول ۱۵۷

۲۷۸ صفحه ۱۴۹ · تمرین — تقارن، چهارضلعی محاطی، چرخ ۱۵۷

۲۷۹ صفحه ۱۵۰ · تمرین ترکیبی — مرور فصل ۹ ۱۵۸

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۶۲ صفحه ۱۳۸ فعالیت

۱ــ پنج نقطه پیدا کنید که فاصله‌ی هر کدام از نقطه‌ی O، ۲ سانتی‌متر باشد. اگر این نقطه‌ها را بیشتر و بیشتر کنیم چه شکلی ایجاد می‌شود؟

۲ــ دو خط متمایز در صفحه یا موازی‌اند یا متقاطع. سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید و در هر حالت مشخص کنید خط و دایره چند نقطه‌ی مشترک دارند.

۳ــ فاصله‌ی یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که آن نقطه را به خط وصل می‌کند. خط d بر دایره‌ی c به مرکز O و شعاع r مماس است. کدام پاره‌خط فاصله‌ی مرکز دایره از خط d را نشان می‌دهد؟ اندازه‌ی آن را با r مقایسه کنید.

۴ــ در هر شکل فاصله‌ی مرکز دایره از خط d را OH بنامید و بدون اندازه‌گیری، رابطه‌ها را با >، = یا < کامل کنید: r __ OH

۱) همه‌ی این نقطه‌ها روی یک **دایره** به مرکز O و شعاع ۲ سانتی‌متر قرار می‌گیرند؛ هرچه نقطه‌ها بیشتر شوند شکل به دایره‌ی کامل نزدیک‌تر می‌شود.

۲) سه وضعیت: خط دایره را در ۲ نقطه قطع کند (قاطع)، در ۱ نقطه (مماس) یا هیچ نقطه‌ی مشترکی نداشته باشد (خارج دایره).

۳) پاره‌خط عمودی که مرکز O را به نقطه‌ی تماس وصل می‌کند (OH) فاصله‌ی مرکز از خط است؛ این پاره‌خط خود شعاع دایره است، پس r = OH.

وضعیت خط و دایره	تعداد نقاط مشترک	رابطه‌ی r و OH
خط قاطع دایره	۲	r > OH
خط مماس بر دایره	۱	r = OH
خط خارج دایره	۰	r < OH

نتیجه: وقتی خط و دایره تنها یک نقطه‌ی مشترک داشته باشند می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۶۳ صفحه ۱۳۹ کار در کلاس

۱ــ در هر شکل کدام پاره‌خط بر دایره مماس است؟

۲ــ در هر شکل خط بر دایره مماس است. زاویه‌ی Q1 چه نوع زاویه‌ای است؟

۳ــ در هر شکل PQ بر دایره مماس است. اندازه‌ی زاویه‌ی خواسته‌شده را پیدا کنید (زاویه‌ی داده‌شده‌ی ۲۳°، ۴۷° و ۶۳°).

۱) پاره‌خطی مماس است که فقط یک نقطه‌ی مشترک با دایره دارد و بر شعاع نقطه‌ی تماس عمود است.

۲) زاویه‌ی Q1 بین شعاع و مماس است؛ **قائمه (۹۰°)** است، چون شعاع در نقطه‌ی تماس بر مماس عمود است.

۳) مثلث OQP در Q قائم است ($Q = 90^\circ$) و مجموع زاویه‌های مثلث ۱۸۰° است؛ پس زاویه‌ی مجهول $x = 90^\circ$ (زاویه‌ی داده‌شده) :- $67^\circ = 23 - 90$، $43^\circ = 47 - 90$، $27^\circ = 63 - 90$.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۶۴ صفحه ۱۳۹ فعالیت

۱ــ روی کاغذ دایره‌ای رسم و آن را جدا کنید. دو نقطه‌ی A و B را روی دایره بگیرید و به هم وصل کنید (وتر). دایره را طوری تا کنید که A و B روی هم بیفتند، تا را باز کنید و خط تا را پررنگ کنید. در هندسه به این پاره‌خط چه می‌گویند؟ روی دایره وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را تکرار کنید. دو پاره‌خط رسم‌شده یکدیگر را در چه نقطه‌ای قطع می‌کنند؟

خط تا بر وتر عمود است و آن را نصف می‌کند؛ پس **عمودمنصف وتر** است. عمودمنصف دو وتر یکدیگر را در **مرکز دایره** (O) قطع می‌کنند، چون مرکز دایره از دو سر هر وتر به یک فاصله است (دو شعاع).

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۶۵ صفحه ۱۴۰ فعالیت

۲ــ نتیجه‌ی فعالیت (۱) را به کمک شکل توضیح دهید.

۳ــ قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است. با توجه به فعالیت‌های قبل توضیح دهید چگونه می‌توانیم اندازه‌ی قطر این بشقاب را مشخص کنیم.

۴ــ دایره‌ای به مرکز O با وتر AB داریم. دو متن را بخوانید و نتیجه‌ی هر یک را کامل کنید. «خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را ــ و برعکس، پاره‌خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند، ــ».

۲) نقطه‌ی O از A و B به یک فاصله است ($OA = OB$ شعاع‌اند)؛ پس روی عمودمنصف AB قرار دارد. بنابراین عمودمنصف هر وتر از مرکز دایره می‌گذرد.

۳) روی لبه‌ی قطعه دو وتر دلخواه رسم می‌کنیم و عمودمنصف هر کدام را می‌کشیم. محل برخورد دو عمودمنصف مرکز بشقاب است. فاصله‌ی مرکز تا لبه را اندازه می‌گیریم تا شعاع r به دست آید و قطر 2r = است.

۴) متن اول (با عمود کردن OH بر AB): مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AOH و BOH در حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند (OA = OB و OH مشترک)، پس AH = BH؛ **خطی که از مرکز بر وتر عمود می‌شود آن را نصف می‌کند.**

متن دوم (با وصل O به وسط وتر M): مثلث‌های AOM و BOM در حالت سه ضلع همنهشت‌اند، پس زاویه‌های M1 = M2 و چون مجموعشان ۱۸۰° است هر کدام ۹۰° است؛ **پاره‌خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند بر آن وتر عمود است.**

تفاوت دو متن: در متن اول عمود بودن مفروض است و نصف شدن نتیجه می‌شود و در متن دوم نصف شدن مفروض است و عمود بودن نتیجه می‌شود (عکس یکدیگرند).

۲۶۶ صفحه ۱۴۱ کار در کلاس

۱ــ در هر شکل RQ بر دایره مماس است؛ زاویه‌ی مجهول را پیدا کنید (شکل‌های الف و ب با زاویه‌های ۲۷°، ۶۹°، ۲۹° و ۳۵°).

۲ــ در هر شکل SR بر دایره مماس است. مقدار a را به دست آورید.

۱) چون شعاع OQ بر مماس RQ عمود است، مثلث ORQ در Q قائم است؛ زاویه‌های دیگر مثلث با هم ۹۰° می‌شوند. زاویه‌ی مجهول زاویه‌ی داده‌شده − 90° = (یا با رابطه‌ی زاویه‌ی مرکزی و کمان). چون زاویه‌ها در شکل مشخص نیستند عدد نهایی گزارش نشد.

۲) مثلث ORS در S قائم است؛ با فیثاغورس: اگر وتر ۱۵ و یک ضلع قائمه ۱۲ باشد، a = √(15^2 − 12^2) = √81 = 9. برای شکل دیگر (۸ و ۳): شعاع + بخش خارجی = OR و شعاع^2 − OR^2 = a^2.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۶۷ صفحه ۱۴۱ تمرین

۱ــ نقطه‌ی B در فاصله‌ی ۱۳ سانتی‌متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر قرار دارد. از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده‌ایم. فاصله‌ی B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.

۲ــ از نقطه‌ی O' خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B بنامید. شکل بکشید و دلیل هر مورد را بنویسید: الف) چرا $O'A = O'B$؟ ب) چرا OO' نیمساز زاویه‌ی O' است؟

۳ــ در کاسه‌ای کروی مقداری آب ریخته‌ایم و AB برابر ۲۴ سانتی‌متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟ (اندازه‌های ۱۲ و ۲۰ سانتی‌متر روی شکل)

۱) مثلث OAB در نقطه‌ی تماس قائم است (شعاع بر مماس عمود). با فیثاغورس: طول مماس = $\sqrt{13^2}$ = $\sqrt{144}$ = 12 سانتی‌متر؛ هر دو نقطه‌ی تماس ۱۲ سانتی‌متر فاصله دارند.

۲) الف) مثلث‌های OAO' و OBO' قائم‌الزاویه‌اند (شعاع بر مماس عمود)، $OA = OB$ (شعاع) و وتر OO' مشترک است؛ پس در حالت وتر و یک ضلع همنهشت‌اند و $O'A = O'B$. ب) از همنهشتی همان دو مثلث، زاویه‌های $AO'O$ و $BO'O$ مساوی‌اند؛ پس OO' نیمساز زاویه‌ی O' است.

۳) اگر شعاع کره ۲۰ و نصف وتر ۱۲ باشد: فاصله‌ی مرکز از سطح آب $\sqrt{20^2 - 12^2}$ = $\sqrt{256}$ = 16 و عمق آب 20 − 16 = 4 سانتی‌متر (اگر مرکز بالای سطح آب باشد). اگر مرکز زیر سطح باشد عمق 20 + 16 = 36 می‌شود.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۶۸ صفحه ۱۴۲ فعالیت

۱ــ ساعت‌ها چه زمانی را نشان می‌دهند؟ پنج دقیقه بعد هر ساعت چه زمانی را نشان می‌دهد؟ در این مدت عقربه‌ی دقیقه‌شمار چند درجه حرکت کرده است؟ نوک کدام عقربه مسیر طولانی‌تری طی کرده است؟

۲ــ الف) دو نقطه‌ی A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده‌اند. آیا ممکن است دو نقطه دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ ب) مرکز را به دو سر کمان وصل کنید؛ زاویه‌ی AOB زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمان AB است.

۳ــ دایره به شش قسمت مساوی تقسیم شده است. زاویه‌ی O1 چه کسری از ۳۶۰ درجه است؟ کمان روبه‌رو به O1 چه کسری از دایره‌ی c1 و c2 است؟ آیا این دو کسر مساوی‌اند؟ آیا طول دو کمان مساوی است؟

۴ــ چرا اندازه‌ی کمان روبه‌رو به O1 در هر دو دایره ۶۰ درجه است؟

۵ــ در شکل زاویه‌ی xOy برابر ۳۶ درجه است. کمان AB چند درجه است؟ از تساوی محیط / AB طول کمان AB / 360° دایره = اندازه‌ی کمان کمک بگیرید.

۱) در ۵ دقیقه عقربه‌ی دقیقه‌شمار 1/12 = 5/60 دایره، یعنی 30° = 12 ÷ 360، می‌چرخد. نوک عقربه‌ی ساعت بزرگ‌تر (عقربه‌ی بلندتر) مسیر طولانی‌تری می‌پیماید، چون شعاع بزرگ‌تری دارد.

۲) الف) بله؛ وقتی A و B دو سر یک قطر باشند دایره به دو نیم‌دایره‌ی 180° تقسیم می‌شود.

۳) از $360 \times 1/6 = 60^\circ$ = 360/6 = O1؛ کمان روبه‌رو به آن در هر دو دایره 1/6 دایره است؛ دو کسر مساوی‌اند ولی طول کمان‌ها برابر نیست، چون شعاع دو دایره فرق دارد (کمان دایره‌ی بزرگ‌تر بلندتر است).

۴) اندازه‌ی کمان با زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به آن برابر است؛ زاویه‌ی $O1 = 60^\circ$ پس هر دو کمان ۶۰° هستند.

۵) اندازه‌ی کمان AB با زاویه‌ی مرکزی برابر است: 36°، یعنی 1/10 = 36/360 دایره و طول کمان = 1/10 محیط.

۲۶۹ صفحه ۱۴۳ | کار در کلاس

۱ــ هر دایره به دو کمان تقسیم شده است؛ اندازه‌ی هر کمان را بنویسید.

۲ــ اندازه‌ی کمان و زاویه‌های مجهول را پیدا کنید (دو شکل: 290° ، x و y و دیگری 50°).

۳ــ در شکل AB قطر دایره است. زاویه‌ی B چند درجه است؟

۱ و ۲) قاعده: اندازه‌ی هر کمان با زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو برابر است و دو کمانی که یک دایره را می‌سازند با هم 360° می‌شوند؛ مثلاً اگر یک کمان 290° باشد، کمان دیگر $360 - 290 = 70^\circ$ است.

۳) چون AB قطر است، کمان AB برابر 180° است. زاویه‌ی B (با توجه به زاویه‌ی 50° و مثلث متساوی‌الساقین OBC) را از رابطه‌ی مجموع زاویه‌های مثلث = 180° به دست می‌آوریم.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۷۰ صفحه ۱۴۳ | فعالیت

۱ــ محیط دایره را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده‌ایم. می‌خواهیم بدانیم چرا هشت‌ضلعی ABCDEFGH منتظم است. رضا می‌گوید: «مثلث‌های AOB، BOC، ... متساوی‌الساقین‌اند. چرا؟ ... پس همه‌ی زاویه‌های سبز رنگ با هم برابرند. چرا؟ ... پس همه‌ی زاویه‌های هشت‌ضلعی با هم برابرند. چرا؟» آرش می‌گوید این تنها برابری زاویه‌ها را نشان می‌دهد و برای ضلع‌ها هم دلیل می‌خواهد. بعد ادامه می‌دهد: «مثلث‌های AOB، BOC، ... همنهشت‌اند؛ در چه حالتی؟ پس ... = CD = BC = AB». توضیحات لازم را اضافه کنید تا دلیل منتظم بودن کامل شود.

۲ــ برای هر مورد دلیل بیاورید. الف) فرض کنید کمان AB = کمان CD؛ چرا وتر AB = وتر CD؟ ب) فرض کنید وتر AB = وتر CD؛ چرا کمان AB = کمان CD؟ نتیجه‌ی فعالیت را در دو جمله بنویسید.

۱) ... = OC = OB = OA (شعاع‌ها)، پس مثلث‌های AOB، BOC، ... متساوی‌الساقین‌اند. هر کمان = 360 ÷ 8 = 45° است، پس زاویه‌ی رأس هر مثلث 45° و هر زاویه‌ی قاعده $(180 - 45)/2 = 67.5^\circ$ است؛ پس همه‌ی زاویه‌های سبز برابرند. هر زاویه‌ی هشت‌ضلعی از دو زاویه‌ی قاعده‌ی مجاور ساخته می‌شود: = 67.5 + 67.5 = 135°؛ پس همه‌ی زاویه‌های هشت‌ضلعی برابرند.

مثلث‌ها در حالت **ض‌زض** (دو ضلع شعاع و زاویه‌ی بین آنها ۴۵°) همنهشت‌اند؛ پس ... = AB = BC = CD و ضلع‌های هشت‌ضلعی مساوی‌اند. چون هم زاویه‌ها و هم ضلع‌ها مساوی‌اند، هشت‌ضلعی منتظم است.

۲) الف) کمان‌های مساوی زاویه‌های مرکزی مساوی دارند؛ مثلث‌های AOB و COD دو ضلع مساوی (شعاع) و زاویه‌ی بین مساوی دارند، پس همنهشت‌اند و AB = CD. ب) اگر AB = CD، دو مثلث در حالت سه ضلع همنهشت‌اند و زاویه‌های مرکزی برابرند، پس کمان‌ها مساوی‌اند.

نتیجه: اگر در یک دایره اندازه‌ی دو کمان برابر باشد، وترهای متناظرشان برابرند؛ و برعکس، اگر دو وتر برابر باشند، کمان‌های متناظرشان برابرند.

۲۷۱ صفحه ۱۴۴ **کار در کلاس**

۱ــ با خط‌کش و نقاله در دایره‌ی روبه‌رو یک پنج‌ضلعی منتظم رسم کنید.

۲ــ دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی شعاع دایره باز کنید و از یک نقطه‌ی دایره شروع کنید و پی‌درپی کمان بزنید.

الف) دایره به چند کمان تقسیم می‌شود؟ ب) چرا این کمان‌ها مساوی‌اند؟ ج) هر کمان چند درجه است؟ د) چند کمان ۱۲۰ درجه در شکل دیده می‌شود؟

۱) زاویه‌ی مرکزی هر ضلع $360 \div 5 = 72^\circ$ است. با نقاله از شعاع OA به اندازه‌ی ۷۲°، ۱۴۴°، ۲۱۶° و ۲۸۸° شعاع می‌کشیم و نقطه‌های برخورد با دایره را به هم وصل می‌کنیم.

۲) الف) ۶ کمان. ب) هر وتر برابر شعاع است (AB = OA = OB)، پس مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است و وترها مساوی‌اند؛ کمان‌های متناظر وترهای مساوی با هم برابرند. ج) هر کمان 60° است. د) هر دو کمان متوالی ۱۲۰° می‌شوند؛ در این شکل ۶ کمان ۱۲۰° (هر دو کمان مجاور) وجود دارد (اگر کمان‌های جدا از هم را بشماریم ۳ تا).

شکل حاصل یک شش‌ضلعی منتظم است.

ایران توشه
توشه ای برای موفقیت

۲۷۲ صفحه ۱۴۵ تمرین

۱ــ OD نیمساز زاویه‌ی مرکزی AOB است و $AOD = 36^\circ$. اندازه‌ی هر یک از کمان‌های AD و BD چند درجه است؟

۲ــ کمان AB برابر x درجه است. اندازه‌ی زاویه‌ی AOB و زاویه‌ی ACB را برحسب x به دست آورید.

۳ــ متحرکی از نقطه‌ی A روی دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر حرکت می‌کند. جدول را کامل کنید (کسر طی‌شده، اندازه‌ی کمان و طول تقریبی؛ محیط $= 2\pi$).

۴ــ قطرهای AB و CD بر هم عمودند. الف) چرا کمان‌های AC، CB، BD و DA مساوی‌اند؟ ب) آیا وترهای AC، CB، BD و DA مساوی‌اند؟ ج) آیا زاویه‌های چهارضلعی ADBC مساوی‌اند؟ چرا؟

۵ــ در شکل وترهای AB و CD بر هم عمودند. الف) آیا کمان‌های AC، CB، BD و DA مساوی‌اند؟ ب) پاسخ را با تمرین قبل مقایسه کنید.

۱) زاویه‌ی $AOD = 36^\circ$ پس کمان $AD = 36^\circ$؛ چون OD نیمساز است، $BOD = 36^\circ$ و کمان $BD = 36^\circ$. (کمان $AB = 72^\circ$)

۲) زاویه‌ی مرکزی $AOB = x$ (برابر کمان) و زاویه‌ی محاطی $ACB = x/2$ (نصف کمان روبه‌رو).

کسر طی‌شده از دایره	اندازه‌ی کمان	طول تقریبی کمان
۱/۲	180°	$\pi \approx 3.14$ cm
۱/۴	90°	$2\pi/4 = \pi/2 \approx 1.57$ cm
۱/۳	120°	$2\pi/3 \approx 2.09$ cm

۴) الف) چهار زاویه‌ی مرکزی AOC، COB، BOD، DOA هر کدام 90° است (قطرها عمودند)، پس کمان‌ها مساوی‌اند (90°). ب) بله؛ کمان‌های مساوی وترهای مساوی دارند. ج) بله؛ ADBC چهار ضلع مساوی و قطرهای مساوی (قطر دایره) دارد، پس مربع است و زاویه‌هایش 90° است (هر زاویه روبه‌رو به نیم‌دایره، 90° است).

۵) الف) نه؛ وقتی وترها از مرکز نمی‌گذرند، بر هم عمودند ولی کمان‌ها لزوماً مساوی نیستند. ب) تفاوت: در تمرین قبل AB و CD قطر بودند (زاویه‌های مرکزی 90°) ولی در اینجا وتر عمودی دلخواه است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

توشه ای برای موفقیت

۲۷۳ صفحه ۱۴۶ فعالیت

۱ــ مانند نمونه‌ی الف، در شکل‌ها وضعیت‌های مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید: الف) رأس روی دایره ب) رأس خارج دایره ج) رأس در مرکز د) رأس داخل دایره (غیر مرکز). در کدام وضعیت زاویه‌ی مرکزی است؟

۲ــ زاویه‌ی مرکزی BOC را برحسب کمان BC بنویسید. چرا زاویه‌های A و C در مثلث AOC برابرند؟ چه ارتباطی میان زاویه‌ی BOC و این دو زاویه وجود دارد؟ زاویه‌ی محاطی BAC را برحسب کمان BC بنویسید.

۳ــ DAC = DAB + BAC را برحسب DC بنویسید.

۴ــ EAC = BAC − ... را برحسب EC بنویسید.

۵ــ پاسخ فعالیت‌های ۲، ۳ و ۴ را مقایسه کنید. عبارت را کامل کنید: «اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر است با ...».

۱) در حالت (ج) (رأس در مرکز) زاویه‌ی مرکزی است. در حالت (الف) که رأس روی دایره است و ضلع‌ها دایره را قطع کرده‌اند، زاویه‌ی **محاطی** است.

۲) BOC = BC (زاویه‌ی مرکزی با کمان برابر است). در مثلث AOC، OA = OC (شعاع) و زاویه‌های A و C برابرند. زاویه‌ی BOC زاویه‌ی خارجی مثلث است و BOC = A + C = 2A؛ پس BAC = BOC/2 = BC/2.

۳) DAC = DAB + BAC = DB/2 + BC/2 = (DB + BC)/2 = DC/2.

۴) EAC = BAC − BAE = BC/2 − BE/2 = (BC − BE)/2 = EC/2.

۵) هر سه حالت (مرکز داخل زاویه، مرکز روی یک ضلع، مرکز خارج زاویه) بررسی شده‌اند و نتیجه یکی است: **اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر است با نصف اندازه‌ی کمان روبه‌رو به آن.**

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۷۴ صفحه ۱۴۷ کار در کلاس

۱ــ با توجه به شکل: الف) زاویه‌های محاطی مقابل به کمان AE را پیدا کنید. ب) دو زاویه‌ی محاطی دیگر رسم کنید که AE کمان مقابل به آنها نیز باشد.

۲ــ در شکل اندازه‌ی زاویه‌ی C را تعیین کنید (زاویه‌ی مرکزی ۸۰°). دو دانش‌آموز (زهرا و فاطمه) جواب داده‌اند؛ راه‌حل‌های آنها را توضیح دهید.

۱) زاویه‌هایی که رأسشان روی دایره است و ضلع‌هایشان به دو سر کمان AE می‌رسد (مثل B، C و D روی کمان مقابل) محاطی مقابل به AE هستند. همه‌ی آنها برابر نصف کمان AE هستند؛ هر نقطه‌ی دیگری روی کمان بزرگ‌تر یک زاویه‌ی محاطی مساوی می‌سازد.

۲) زهرا: زاویه‌ی مرکزی AOD = 80°، پس کمان AD = 80° و زاویه‌ی محاطی C = 80/2 = 40°.

فاطمه: زاویه‌ی $AOC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$؛ در مثلث متساوی‌الساقین AOC مجموع دو زاویه‌ی قاعده $180 - 100 = 80^\circ$ و هر یک $80/2 = 40^\circ$ است. هر دو روش به $C = 40^\circ$ می‌رسند.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

---

۲۷۵ صفحه ۱۴۷ | فعالیت

۱ــ یک زاویه‌ی محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید. سه زاویه‌ی محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید. فکر می‌کنید چند زاویه‌ی دیگر می‌توان رسم کرد؟ چرا؟ آیا همه‌ی این زاویه‌ها با هم برابرند؟ چرا؟

۲ــ قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است. اندازه‌ی هر کمان چند درجه است؟ چند زاویه‌ی محاطی مقابل به کمان AB می‌توان رسم کرد؟ اندازه‌ی این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

---

۱) بی‌شمار زاویه‌ی محاطی می‌توان رسم کرد (رأس می‌تواند هر نقطه‌ی کمان بزرگ‌تر باشد). همه‌ی آنها برابرند، چون هر کدام نصف کمان AB است.

۲) هر کمان 180° (نیم‌دایره) است. بی‌شمار زاویه‌ی محاطی می‌توان رسم کرد و هر کدام $180/2 = 90^\circ$ است؛ یعنی هر زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر **قائمه** است.

---

۲۷۶ صفحه ۱۴۸ | کار در کلاس

۱ــ اندازه‌ی زاویه‌ها و کمان‌های خواسته‌شده را پیدا کنید.

۲ــ رأس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی‌متر روی دایره قرار دارد. چرا این لوزی مربع است؟ قطر دایره چند سانتی‌متر است؟

---

۱) برای هر زاویه‌ی محاطی: نصف کمان روبه‌رو؛ برای هر کمان: دو برابر زاویه‌ی محاطی مقابل یا برابر زاویه‌ی مرکزی. چون شکل‌ها مشخص نیستند عدد گزارش نمی‌شود.

۲) در لوزی زاویه‌های روبه‌رو برابرند و در چهارضلعی محاط در دایره مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌رو 180° است (محاطی‌ها نصف کمان‌های مکمل‌اند)؛ پس هر زاویه 90° است و لوزی با زاویه‌ی قائمه مربع است. قطر مربع قطر دایره است: $5\sqrt{2} \approx 7.07$ سانتی‌متر.

(چون هر زاویه‌ی 90° روبه‌رو به نیم‌دایره است، قطر مربع قطر دایره می‌شود.)

ایران توشه
توشه‌ای برای موفقیت

۲۷۷ صفحه ۱۴۸ تمرین

۱ــ اندازه‌ی زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید (شکل‌هایی با ۴۰°، ۱۳۰°، ۴۲°، ۳۳°، ۵۷° و ...).

۲ــ در شکل زاویه‌ی AOB برابر ۷۲ درجه است. کمان AB چند درجه است؟ اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی AB باز کنیم و با شروع از B پی‌درپی کمان بزنیم، چند کمان مساوی روی دایره جدا می‌شود؟

۱) قاعده‌ها: زاویه‌ی مرکزی = کمان، زاویه‌ی محاطی = نصف کمان، °مجموع کمان‌های دایره = 360؛ زاویه‌ی روبه‌رو به قطر °90 است. چون شکل‌ها مشخص نیست، مقدار نهایی نوشته نشد.

۲) کمان °AB = 72. تعداد کمان‌های مساوی 5 = 72 ÷ 360 است (یک پنج‌ضلعی منتظم).

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۷۸ صفحه ۱۴۹ تمرین

۳ــ دایره به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است. الف) شکل چند خط تقارن دارد؟ ب) اندازه‌ی دو زاویه‌ی مشخص‌شده را پیدا کنید.

۴ــ دایره‌ای بکشید و چهارضلعی ABCD را طوری رسم کنید که هر چهار رأس آن روی دایره باشد. چرا مجموع دو زاویه‌ی روبه‌رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر ۱۸۰ درجه است؟

۵ــ کمان AB برابر x درجه است. الف) زاویه‌ی O1 را برحسب x بنویسید. ب) کمان قرمزرنگ را برحسب x بنویسید. ج) زاویه‌ی C را برحسب x بنویسید.

۶ــ پره‌ها دوازده کمان مساوی روی محیط چرخی به شعاع ۳۰ سانتی‌متر ایجاد کرده‌اند. الف) طول TX چقدر است؟ ب) مثلث ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ ج) طول ZT چقدر است؟ د) مثلث XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟ هـ) طول ZX چقدر است؟

۳) الف) ۸ خط تقارن (۴ خط از رأس‌های مقابل و ۴ خط از وسط ضلع‌های مقابل). هر کمان °45 = 8 ÷ 360 است؛ اگر زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به یک کمان باشد °22.5 و اگر روبه‌رو به دو کمان °45 است.

۴) زاویه‌های روبه‌روی A و C به ترتیب نصف کمان‌های BCD و BAD هستند و مجموع این دو کمان کل دایره، یعنی °360 است؛ پس °A + C = 360/2 = 180. همین طور °B + D = 180.

۵) الف) O1 = x (زاویه‌ی مرکزی برابر کمان). ب) کمان قرمز 360 − x است. ج) زاویه‌ی C محاطی روبه‌رو به کمان AB است: x/2.

۶) هر کمان °30 = 12 ÷ 360. فرض: T و X چهار کمان از هم فاصله دارند، یعنی کمان °TX = 120 و TX = 2 × 30 × sin 60° = 30√3 ≈ 51.96 سانتی‌متر. اگر Z و T دو سر یک قطر باشند، ZT = 60 سانتی‌متر و مثلث XTZ چون زاویه‌ی روبه‌رو به قطر °۹۰ است قائم‌الزاویه است و ZX = √(60^2 − (30√3)^2) = 30. مثلث ZRT با دو ضلع شعاع متساوی‌الساقین است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

۲۷۹ صفحه ۱۵۰ تمرین ترکیبی

۱ــ با توجه به شکل، اندازه‌ی زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید: ? = ∠C، ? = ∠COB، ? = BC کمان (زاویه‌ی ۳۰°).

۲ــ کاغذی مربعی‌شکل به قطر ۲۴ سانتی‌متر داریم. بزرگ‌ترین دایره‌ای را که می‌توان روی آن رسم کرد رسم کرده‌ایم. قطر این دایره را حساب کنید.

۳ــ الف) ضلع‌های روبه‌رو در چهارضلعی داخل دایره برابرند. چرا چهارضلعی مستطیل است؟ ب) شعاع دایره ۵ و عرض مستطیل ۱۹ سانتی‌متر است. طول مستطیل را به دست آورید.

۱) اگر زاویه‌ی ۳۰° محاطی روبه‌رو به کمان BC باشد، BC = 2 × 30 = 60° و COB = BC = 60°؛ اگر همان ۳۰° زاویه‌ی C باشد، کمان روبه‌رو 60° است. دقیق بودن به شکل بستگی دارد.

۲) قطر مربع ۲۴ و ضلعش 24/√2 = 12√2 ≈ 16.97 سانتی‌متر است. بزرگ‌ترین دایره‌ی داخل مربع به ضلع مربع مماس است؛ پس قطر آن 12√2 ≈ 16.97 سانتی‌متر است.

۳) الف) چهارضلعی با ضلع‌های روبه‌رو برابر متوازی‌الاضلاع است؛ زاویه‌های روبه‌رو برابرند و چون چهارضلعی محاطی است مجموع هر دو زاویه‌ی روبه‌رو 180° است؛ پس هر زاویه 90° و چهارضلعی مستطیل است. ب) قطر مستطیل قطر دایره است (2r)؛ (عرض^2 − 2^(2r))√ = طول. با اعداد متن (2r = 10 و عرض 19) جواب حقیقی نمی‌شود (عرض از قطر بزرگ‌تر است)؛ احتمالاً عدد ۱۹ در متن اشتباه خوانده شده است.

این جواب ممکن است دقیق نباشد.

این فایل توسط سایت ایران‌توشه تهیه شده است.
irantooshe.ir
ایران‌توشه
توشه‌ای برای موفقیت